esdi
tese

MARIA
RITA
DE
BARROS
FERREIRA

1974

objetos auxiliares

fotografias

Maria Rita de Barros Ferreira ?

1. Objetos auxiliares:

Os objetos feitos são exemplos de um trabalho apoiado em uma filosofia psicológica ou seja de uma filosofia do desenvolvimento da inteligência.
Não são um ponto final , mas, ao contrário uma proposta de um método de trabalho.
Este método pode ser empregado dentro de toda a extensão do aprendizado da matemática na infância.
Foram escolhidos como ilustração, apenas alguns conceitos básicos em fases separadas, porém êste tipo de abordagem deve ser feito a cada novo passo, constituindo assim, um sistema pedagógico, até a criança alcançar o tipo de raciocínio formal-abstrato, quando não mais precisará dêstes artifícios, pois estará capaz de pensar abstratamente.
Deve-se notar que não há necessariamente nêstes objetos apresentados um encadeamento, isto é, um elemento não leva obrigatoriamente a outro elemento. São apenas exemplos isolados, tomados em diferentes níveis para demonstrar a viabilidade do método durante um longo período.(por exemplo, corresponderia cada objeto a cada ano do curso primário, exemplificando dêste modo apenas uma das dificuldades que a criança deveria atravessar naquele período.)

1.1 Aplicação do material:

A aplicação de todos os objetos será estruturada em três fases. A cada uma delas corresponde um aprendizado diferente, de acôrdo com as três fases descritas por Piaget, para a formação de um conceito:

1) Fase preliminar
2) Fase estruturada
3) Fase prática.

A fase preliminar, a do jôgo, corresponde a uma atividade bastante indireta, aparentemente sem finalidade - a espécie de atividade que é realizada e apreciada para o próprio bem. É essa espécie de comportamento que é normalmente chamada de jôgo.
Essa fase deve portanto, ser tão livre quanto possível, com os ingredientes do conceito disponíveis como material de brinquedo.

É o primeiro contato da criança com o material.

A segunda fase, é mais direta e com um fim em vista, mas é caracterizada pela falta de qualquer compreensão nítida do que se está buscando . Já há um certo grau de atividade estruturada.

A terceira fase deve oferecer uma prática adequada para a fixação e aplicação dos conceitos que foram formados.
A maior parte do aprendizado deve ser realizada individualmente, ou em pequenos grupos de dois ou três.

2.1 Descrição do material:

Material - execução - medidas-

O material foi bàsicamente executado em madeira, o que o tornou muito mais barato.
Algumas peças são de fàcil execução, podendo serem feitas mesmo em uma pequena oficina, digamos, da própria escola onde serão utilizadas (caso a tenha).
Uma pequena parte do material foi feita em acrílico, porque era necessário a transparência.

As medidas foram baseadas nas tabelas antropométricas de Henry Drayfuss ou então tiveram razões matemáticas (unidade).

A côr só foi utilizada quando exercia uma função e algumas vêzes (no caso da prancha 2) a variação da percepção táctil á visual na faixa de idade visada.

A madeira utilizada foi a "Gonçalo Alves".

2.2 Especificação do material:

a) Prancha 1:

Caracterização da forma plana:

O mundo dos objetos é rico em formas. Na geometria, algumas formas típicas desempenham um papel especial.

O ensino moderno da matemática elementar é caracterizada pela representação material de qualquer fato.
Ao manusear as formas, a criança poderá sentir suas características.
Todos êstes objetos têm características: o que não é "redondo" é "plano" tem "cantos" ou "pontas". O bloco triangular é "pontudo" o quadrado tem "quatro pontas", etc.
Na prancha só vêm representadas, a título de exemplo, quatro formas, mas o mesmo tratamento deve ser dado às outras figuras.
Os encaixes permitem à criança, a exploração da forma interna exteriormente e ainda o desenvolvimento motor.

/b) Prancha 2:

Exploração da forma

Caracterização do tamanho

Classificação

Séries

Classes-subclasses

Conjunto

Correspondência (um para um, um para muitos)

As peças maiores não foram feitas em madeira maciça, apresentando,portanto, frisos criados pelo corte da madeira em algumas faces.
Esses fato não foi considerado como problema, pois que na faixa de idade em que será aplicado o material, êstes frisos não são sequer notados pelas crianças, afirmação esta baseada no pressuposto levantado de que a atividade inteligente da criança é primeiramente muito mais táctil e "construtiva" que visual ou verbal e constatado na prática durante a experimentação realizada.
A diferenciação das séries foi feita através de variações de texturas(pelo mesmo motivo)
A primeira série é lisa, na segunda, a textura foi dada por ranhuras.
Estes sulcos foram mais profundos para facilitar a percepção das crianças que em caso contrário tenderiam a considerá-los apenas como um risco.
É um material bastante rico e flexivel.
A princípio, a percepção da forma pelo manuseio, o aprender a examinar as propriedades ativamente.
A ordem do tamanho: maior-menor. O jôgo com objetos reais traz experiencias que serão base intelectual para conceitos posteriores.
A criança deve ser convidada a construir outras formas com o material.

As formas serão consideradas estéticas se a disposição dos objetos for caracterizada pela harmonia e contraste.
Pensar acêrca das disposições escolhidas intuitivamente, pode levar à descobertas de estruturas formais, e com isto estamos praticando matemática, pois, entende-se por matemática moderna o estudo das estruturas formais.
As peças foram dimensionadas de modo a serem, maior que a mão da criança, do mesmo tamanho da mão da criança, pouco menor, e bem menor,(em média) para que a noção de tamanho tenha a princípio ela mesma como referencial.

A menor peça é a unidade para o sistema.
Deverá ser introduzida também esta noção à criança, colocando uma peça ao lado da outra, ao formar por acréscimo, uma nova peça similar à seguinte.

A criança fará coordenação de duas séries por proximidade, separação, ordem, continuidade , além do reconhecimento de formas através de suas propriedades euclidianas (número de lados, vértices, etc).
As séries poderão ser separadas, selecionadas, contadas, poderá ser apreciada a relatividade do têrmo maior-menor, alguns, poucos , todos -
As classificações podem ser feitas por relações simultâneas, por exemplo: textura e formato, etc.
Nêste trabalho só estão sendo apresentados cubos, mas, o mesmo tratamento deve ser feito com várias formas como cilindros, esferas, cones pirâmides, etc.
Portanto, cada série deve distinguir-se da outra por textura e/ou forma.
A mesma série deverá repetir-se em texturas diferentes para que a criança possa fazer maior número de classificações e correspondências.

Com o mesmo material poderá ser simultâneamente introduzido o conceito de conjunto e subconjunto: Por exemplo, conjunto dos cubos,(A) subconjunto dos cubos lisos (B) B A etc.

c) Prancha 3:

Desenvolve o conceito de correspondência de um para um, introduzindo o princípio das coordenadas cartesianas.
Admite, dificuldades progressivas, Por exemplo: forma mais côr , forma mais côr mais textura, forma mais côr mais textura mais pêso.
O grau de dificuldade pode ainda ser variado de diversas maneiras , conforme o momento da aplicação.
Há sempre de duas a quatro possibilidades. O material pode ser trabalhado também pela teoria dos conjuntos.

d) Prancha 4:

Tem duas finalidades básicas: a de introduzir o conceito de volume e da unidade cm^3 e a noção de bases diferentes e de valor de posição.
O primeiro objetivo se fará enchendo as caixas transparentes com os cubinhos unitários. Daí, a criança poderá deduzir concretamente as fórmulas de volume. (o mesmo processo poderá ser usado em relação à áreas).
O segundo objetivo será descrito mais detalhadamente:
Para uma criança pequena, 17 é apenas associado à palavra-número dezessete, e não é, certamente, decomposto em dez e um sete.
O mesmo se aplica aos conceitos de ordem mais elevada da adição e das outras operações.
Uma criança poderá ter aprendido o conceito de que, para somar dois números, temos de contar seguidamente do primeiro número, com tantos números intermediários quanto indicado no segundo . Contudo ela poderá fi

car muito longe de conceber a estrutura da tarefa de 27 + 35 em que se deve realizar o grupamento e reagrupamento de dez em dez para executar econômicamente a tarefa.
Em outras palavras, os conceitos e processos matemáticos têm de ser aprendidos, primeiro, em forma pura, seguida dos mesmos conceitos e processos em forma notacional, isto é, com a estrutura do sistema notacional superimposta a êles.
Por exemplo, quando escrevemos um grande número como 24579, o que realmente queríamos significar é:

$$2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Se olharmos êste desenvolvimento à luz do princípio da variabilidade matemática, vemos que três variáveis entram nesse arranjo númerico : os algarismos, as potências e a base.
Poderíamos variar qualquer ou todos êstes sem destruir o aspecto essencial do valor de posição.
O conceito do valor de posição é independente dos valôres dos algarismos, exceto que o número dêstes é restringido em função da base. É independente do número de potências usadas, que é o que dá ao conceito sua natureza matemática característicamente aberta - é aberta em direção ao infinito.
Além disso é independente da base.
Por exemplo:

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

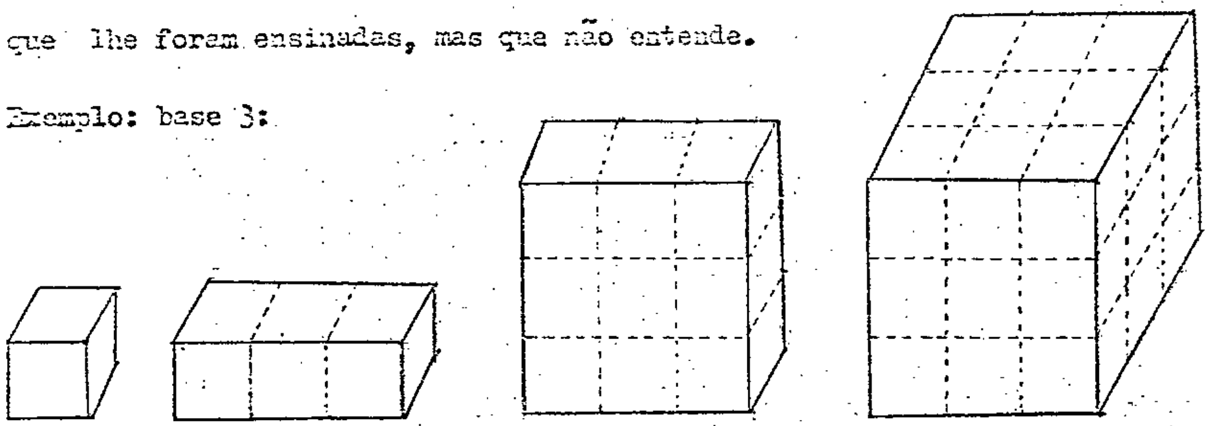
Também pode ser escrito assim:

$$1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^0$$

Em outras palavras, 126, no sistema ternário, seria escrito como 11.200.
O que é comum a todos êsses modos possíveis de expressar números é o conceito de valor de posição. Quando tivermos variado os algarismos, as potências e a base, que restará ? Qual é a abstração matemática do valor de posição ?
Em cada caso, arranjamos de acôrdo com as potências descendentes da base, e o valor de cada algarismo deve ser sempre menor que o valor da base; ir para a direita significa atingir a potência inferior, ir para a esquerda é encontrar a potência superior seguinte.
Se um algarismo atingir ou ultrapassar a base, significa que já temos no mínimo, mais um na potência superior seguinte.
Esse é o "esqueleto" do conceito do valor de posição e é com êsse grau de generalização que devemos raciocinar à luz do princípio da variabilidade matemática.
Usando o material a criança pode ver concretamente os números em outras bases(em função do lado do cubo) e se acostumará a perceber a semelhança essencial da estrutura, semelhança essa que é a estrutura matemática.
Quando a criança representa essa estrutura com o simbolismo matemático, estará, então, utilizando êsse simbolismo para comunicar informação sôbre a estrutura que descobriu e não apenas usando um conjunto de regras

que lhe foram ensinadas, mas que não entende.

Exemplo: base 3:



Cada conjunto de caixas representa um diferente valor da base.
Os volumes das figuras sucessivas estão em progressão geométricas no exemplo acima na razão comum 3.
Na caixa para base 4, essa razão será 4, etc.
Depois de exercitada a noção de base e dominada completamente a estrutura do material, pode se conduzir às quatro operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.
Por exemplo:
Uma soma em base 4 :

$$\begin{array}{r} 1232 \\ +223 \\ \hline 2121 \end{array}$$

A base 10 também deverá ser usada.
Outro exemplo:

Armar 157 unidades em diferentes bases:

base 3 :	12211
base 4 :	2131
base 5 :	1112
base 6 :	321
base 10:	157

Uma subtração em base 4:

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 1232 \\ \underline{(111)} \\ 1102 \end{array}$$

Estes exercícios poderão ser realizados com as caixas de bases diferentes.

e) Prancha 5:

Introdução aos conceitos algébricos elementares:

Levará tempo para que uma letra possa simbolizar uma classe de números, para a criança, tão claramente quanto o número, uma classe de coleções.
É preciso então, fazer equações simples, representadas concretamente.
Por exemplo:

$x + y = 3$ $\qquad \square\ \square + y = \square\ \square\ \square$

$x = 2$ $\qquad y = \square$

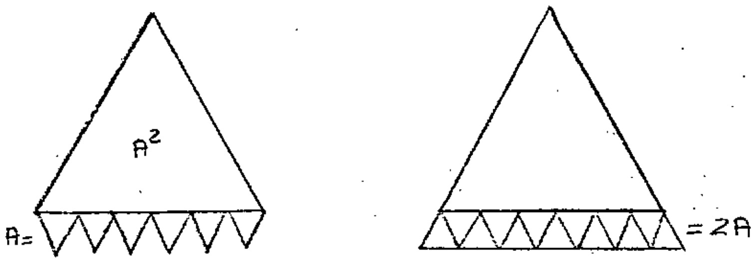
(quantos quadrados valem y?)

Dêsse modo as crianças podem ser levadas a compreender o que realmente uma equação simboliza, tirando de sua experiência qual é a essência comum da "situação de equação".
Foi escolhido como outro exemplo de emprêgo do método dentro da álgebra o conceito matemático de quadrado:
Certo abandono da forma geométrica de um quadrado é necessário, agora, para tornar o conceito de quadrado mais abstrato.
Por isso foi usado também o triângulo como forma básica.
A princípio a criança deve ser conduzida a fazer formas semelhantes, mas, maiores a partir de outras formas idênticas. Isto é, formar quadrados maiores por meio de outros pequenos, ou triângulos maiores por meio de outros pequenos, etc., o que serve como exercício preliminar para o teorema das áreas das figuras semelhantes e também generaliza o conceito de quadrado, tornando-o menos prêso à forma do quadrado real. Isso deve ser seguido por uma gradual apreciação da relação:

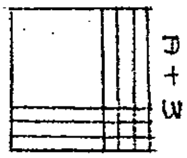
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Por exemplo:
Tomemos um grande triângulo que pode ser cheio por A x A ou seja A^2 pequenos triângulos.
Quando estiver cheio, haverá, ao longo de cada lado exatamente A pequenos triângulos.
Se acrescentarmos uma linha de A triângulos obteremos a figura à esquerda e se somarmos outra linha A, a figura à direita.

Temos, portanto, $A^2 + 2A$ e se acrescentarmos mais um triângulo teremos $A^2 + 2A + 1$ e teremos completado outro triângulo grande cujas linhas tem 1 mais que A, e, portanto, deve haver ~~nde~~ $(A + 1)^2$ pequenos triângulos.
Assim, construimos $(A + 1)^2$ por meio de A^2, 2A e 1, e assim por diante, $(A + 2)^2$ por meio de A^2, 4A e 4 etc., até obtermos a fórmula $(A + B)^2$ onde A é o número de pequenos triângulos em uma linha do primeiro grande triângulo e B é o dos triângulos extra que entram na linha à proporção que construimos triângulos cada vez maiores.



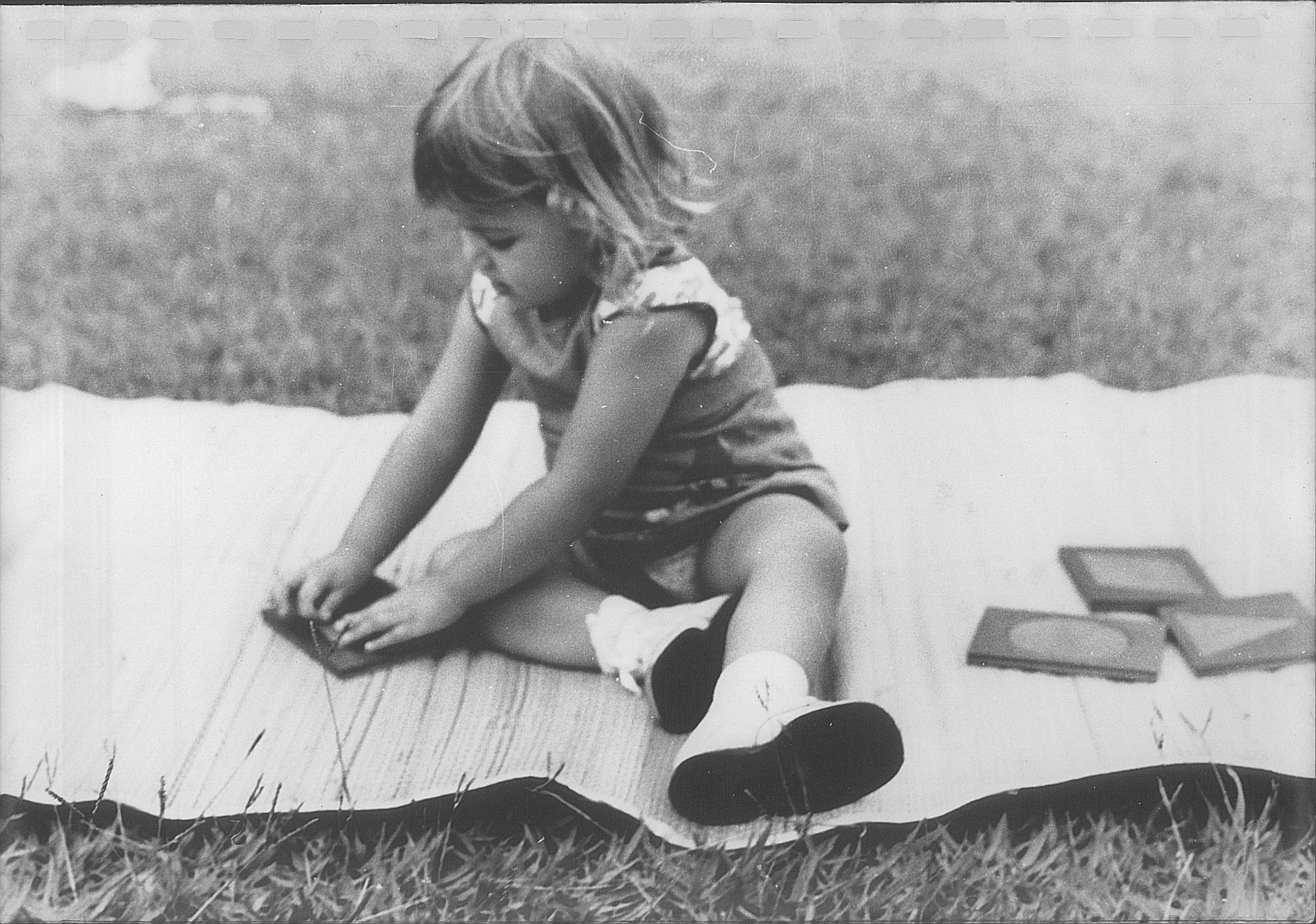
Outro exemplo:
Digamos que o quadrado seja A por A: isso significa que há A linhas até a parte inferior do quadrado, depois ainda há mais 3, o que perfaz A + 3 linhas ao todo.
Em cada linha há claramente, A + 3 pequenos quadrados, então construimos $(A + 3)^2$ de $A^2 + 6A + 9$



Dentro desta linha ainda poderá se dar maior variedade de aplicação ao material.

Prancha 6:

Visão espacial do ângulo, das relações dos ângulos dentro de uma figura geométrica.
Por exemplo: a criança será convidada a distribuir os pinos segundo a organização de um cubo - Terá oportunidade de observar os oito vértices e a relação espacial das arestas que formam os ângulos.
Isto deverá ser repetido com diversas formas para que além da criança observar os ângulos dentro dessas formas, maneje também a rotação de um ângulo em relação a um ponto.
Aqui foi utilizada a côr para fazer contraste e ficar mais claro a visão espacial do ângulo.



esdi

trabalho de formatura

1974

Esdi- Escola Superior de Desenho Industrial
Trabalho de formatura
29 de novembro de 1974

Maria Rita de Barros Ferreira

Proposta: trabalho teórico/prático:

Estudo do desenvolvimento do raciocínio matemático na infância, segundo Piaget

Proposição de objetos auxiliares

P 83
19+4

ESDI

N.º de registro 1557/78

0. Introdução

1ª parte: teórica

O desenvolvimento da inteligência, segundo Piaget

0. Introdução

1.1 Processos cognitivos básicos.

1.2 Desenvolvimento do pensamento infantil.

2. Os principais períodos de desenvolvimento.

2.1 O período sensório-motor

2.2.i O subestágio pré-conceitual

2.2.ii O subestágio instintivo

2.3 O subperíodo das operações concretas

2.4 Período de operações formais

3. Pequeno glossário auxiliar

2ª parte: teórica

A formação dos conceitos matemáticos baseada na teoria psicológica de Piaget

0. Introdução: O aprendizado da matemática

1. A formação do conceito

1.1 O conceito

1.2 A formação dos conceitos e a matemática

2. O problema das bases lógicas, dos números naturais e da matemática em geral

3. Conclusões

3ª Parte:

1. Objetos auxiliares

1.1 Aplicação

2.1 Descrições:
material - custo - execução - medidas

2.2 Especificação do material

3. Desenhos

Bibliografia

Introdução:

Êste trabalho é um estudo do desenvolvimento do raciocínio matemático da criança, baseado na teoria de Piaget. Propõe também uma série de objetos auxiliares na formação dêste raciocínio.

Foi escolhido a teoria de Piaget, pois a estensão de seu trabalho supera de muito quaisquer investigações anteriores sôbre o pensamento da criança, e inclui uma série de estudos sôbre a formação de conceitos de número, tempo, velocidade e movimento, quantidade, espaço, geometria e classificação.

Em Piaget, o matemático se mescla com o próprio desenvolvimento da inteligência, com as estruturas do pensamento infantil.

A exposição foi dividida em três partes:

Uma apresentação da teoria psicológica de Piaget, de maneira geral.

A segunda parte, mais específica, voltada para o problema particular da compreensão matemática baseada na pesquisa realizada.

A terceira parte é um resultado prático do estudo teórico efetuado com a exibição de alguns exemplos.

1ª Parte:

O desenvolvimento da inteligência segundo Piaget:

0. Êste ensaio resume os elementos da teoria de Piaget sôbre as origens da inteligência nas crianças e os estágios por que estas passam em seu desenvolvimento cognitivo.

1.1 Processos cognitivos básicos:

Raciocinando sôbre o que observava, Piaget chegou à noção de que a inteligência de uma criança de mais idade não é maior, quantitativamente do que a de uma criança menor, porém, apenas diferente do ponto de vista qualitativo. Estudou, portanto, os modos de pensamento das crianças para compreender aquelas diferenças.

Das observações e experiências que fêz, Piaget deduziu que as crianças não herdam capacidades mentais prontas, mas, apenas, um modo de reagir ao ambiente. Em essência, essa reação consiste num desejo de adaptar-se ao ambiente, como toda criatura viva precisa fazer para sobreviver.

A primeira indicação de capacidade de organizar aparece então, no desenvolvimento de ações habituais. Essas sequências bem definidas de ações que Piaget chama de esquemas, são conjuntos totais organizados e frequëntemente repetidos, que podem ser fàcilmente reconhecidos entre outros comportamentos diversos e variáveis. Tão logo se desenvolve, um esquema de ação se aplica a todo objeto novo e a tôda a situação nova. Este processo de incorporação de objetos ou experiências novas aos esquemas existentes é a assimilação. A criança assimila experiências numa sucessão de esquemas cognitivos. Seus brinquedos também são em grande parte um processo de assimilação de objetos e experiências novas às fantasias.

Complementar ao processo de assimilação é o processo de procurar novos modos de comportamento bem sucedidos, quando o ambiente não reage aos esquemas já aprendidos pela criança. A êste processo de modificar esquemas para resolver problemas que resultam de experiências novas dentro do ambiente, Piaget chama de acomodação. A acomodação é processo ativo

que se manifesta como exploração, indagação, tentativa e êrro, realização de experiências ou reflexão.
Através da interação dêsses dois processos de atividade inteligente, a criança assimila experiências novas a esquemas existentes, ou acomoda seus esquemas, estendendo-os ou combinando-os para atender a situações novas. E êste binômio assimilação-acomodação poderia ser definido como a atividade inteligente.

1.2 Desenvolvimento do pensamento infantil:

Nos primeiros 18 meses de vida, mais ou menos, a aprendizagem da criança consiste em desenvolver e coordenar suas ações e percepções em esquemas de ação organizada ou esquemas sensório-motores. Todavia com a capacidade de usar símbolos, desenvolve-se uma nova espécie de esquema. É o esquema representacional, essa capacidade geral de representar uma coisa por outra que deriva dos próprios esquemas sensório-motores. Ao fim da primeira infância a habilidade de ver semelhanças entre ações ou situações já foi desenvolvida nos esquemas sensório-motores, e, do reconhecimento de semelhanças aos esquemas representativos a distância é curta. A linguagem porém, pode ser essencial a seu maior desenvolvimento pois substitui ações e, oportunamente o pensamento verbal ultrapassa a ação por sua rapidez e flexibilidade.
Com o aparecimento da representação simbólica, todo pensamento precisa ser reconstruido em novo plano.
Imediatamente em seguida ao período sensório-motor, há um estágio de desenvolvimento no qual o pensamento, embora representacional, ainda não é conceitual.
A êsse período Piaget dá o nome de estágio préconceitual ; a criança pequena não é, ainda, capaz de compreender como formar classes e ver suas inter-relações; vê semelhanças. Seus julgamentos decorrem de suas próprias experiências. Se lhe dão uma coleção de formas coloridas e lhe pedem para juntar as que combinam, ela faz um trem, uma casa ou alguma outra construção que lhe interesse,; não pensa em classificar pela côr ou formato, embora os perceba. Dêsse tipo de pensamento, assim deformado pelo ponto de vista da criança, Piaget chama "egocêntrico".
O pensador egocêntrico assimila experiências do mundo em geral a esquemas derivados de seu próprio mundo imediato, vendo tudo em relação a si próprio. Não vê o mundo como constituido de objetos naturais que têm relações entre si, e nem vê a si próprio como um objeto independente dentro dêsse mundo. Em suma, sua concepção de mundo é semelhante a dos adultos em muitas sociedades primitivas.
Ao fim do estágio préconceitual, o pensamento "pré - conceitual" da criança desenvolveu-se até um ponto em que ela se torna capaz de dar razões para suas crenças.
O pensamento continua egocêntrico, mas a criança atinge alguns concei-

tos verdadeiros, isto é, pode classificar objetos corretamente ou, possívelmente, é capaz de pô-los em ordem pelo tamanho. Se lhe pedem que separe formas coloridas, juntando "aquelas que se combinam", a criança as arruma então pela côr ou pelo formato, embora não lhe ocorra dispô-las simultâneamente de acôrdo com ambas as classificações.

De fato elas têm dificuldade de lidar com duas relações ao mesmo tempo. A dificuldade é evidente, também, quando se pergunta a uma criança sôbre as relações entre um todo e suas partes ou entre uma classe e suas subclasses.

Na falta de estrutura mental que lhes permita fazer comparações, as crianças baseiam seus julgamentos na percepção.

Piaget dá a êsse estágio de pensamento o nome de estágio intuitivo.

No pensamento intuitivo que depende de julgamentos perceptuais, as conclusões podem diferir. Consequentemente tal pensamento não é "reversível", à maneira do pensamento lógico. Uma operação lógica é reversível. Se, por exemplo, adicionamos três a dois, obtemos cinco; se depois invertermos a operação e subtraimos três voltamos ao ponto onde começamos. Será sempre assim, seja quem fôr que faça a experiência e onde quer que seja feita. Todavia, quando feitos perceptualmente os julgamentos diferem de pessoa para pessoa, ou, na mesma pessoa, em ocasiões diferentes.

Em resultado de suas ações as crianças gradualmente internalizam idéias de classes e séries. Quando isso ocorre, chegam ao período de operações concretas. Então são capazes de explicar as classes que formaram e compreender relações entre elas.

Não se trata porém, de um afastamento total do mundo ativo das crianças pequenas, pois Piaget considera que a ação é, na realidade, substituída por uma ação na imaginação, chamada "operação", que pode depender de imagens, pelo menos em primeiro lugar.

Na matemática e na ciência, muito pensamento consiste em ações mentais simbolizadas por vários sinais ou algarismos. Tomemos o exemplo dado por Piaget:

"Em toda expressão $(x^2 + y = z - u)$ cada têrmo se refere a uma ação específica.

O sinal = expressa possível substituição, o sinal (+) combinação, o sinal(-) separação, o sinal (x2) a ação de somar "x" x vêzes.

E cada um dos valôres u, x, y e z representa a ação de repetir a unidade certo número de vêzes.

Assim cada um dêsses símbolos se refere a uma ação que poderia ser realizada, mas que a linguagem matemática se contenta em descrever na forma de ações internalizadas, isto é, operações do pensamento."

Quando atingido o pensamento lógico, novo desenvolvimento pode ocorrer na passagem das operações concretas para operações formais, mais abstratas.

Operações concretas são operações lógicas, como classificações, seriações, simetria, correspondências de um para um ou de um para muitos e assim por diante, mas seu uso é limitado a objetos ou materiais

reais ou àqules que podem ser fàcilmente imaginados. As operações algébricas citadas há pouco seriam difíceis para a criança no período de operações concretas, a menos que pudessem ser representadas em alguma forma sólida ou visual.
Já o adolescente pode ver a significação geral da "variável". Ele não precisa mais lidar diretamente com objetos, mas pode usar elementos verbais isolados. Assim, atinge o pensamento hipotético dedutivo.
Existem ainda outras influências sôre a cognição, além das exercidas pelas ações da propria criança. São em grande parte as oportunidades oferecidas pelo ambiente. Por exemplo, em experiências realizadas pela escola de Genebra, demonstrou-se que africanos que têm poucas oportunidades de usar aptidões manuais, desenvolvem conceitos expaciais mais tarde que crianças européias, e a linguagem de uma tribo pode ter falta de palavras para certos conceitos e assim, inibir seu desenvolvimento.
Não se pode também ignorar que componentes afetivos entrem em toda a estrutura cognitiga.

2. Os principais períodos de desenvolvimento:

O desenvolvimento á uma equilibração progressiva, isto é, a passagem de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior. Piaget e sua principal colaboradora, Inhelder, acreditam que podem distinguir três períodos principais, em que o desenvolvimento cognitivo é qualitativamente diferente com substágios em cada um dêles.
O primeiro é o período de inteligência sensoro-motora, que se estende do nascimento até o aparecimento da linguagem, aproximadamente durante os dezoitos primeiros meses de vida.
O segundo período estende-se dessa época até cêrca de onze ou doze anos e consiste em preparação para operacões concretas de classes, relações e números e sua realização.
O terceiro período, o de operações formais, começa aproximadamente aos doze anos e atinge seu pleno desenvolvimento cêrca de três anos mais tarde.
O segundo período é subdividido: o período II A, estende-se de 18 meses, mais ou menos, até cêrca de sete anos e é um período pré-operacional. Subdivide-se novamente em dois estágios: o primeiro estende-se até cêrca de quatro anos e é porêle chamado de estágio pré-conceitual; o segundo é o estágio intuitivo.
O período II B, estende-se mais ou menos dos sete anos até a adolescência e é o período das operações concretas.
A maior parte do pensamento da criança em qualquer estágio ou período, tem uma estrutura característica. No período I, é um sistema de ações "reversíveis", significando "reversível" para Piaget, que a criança pode recompor sua ação por movimentos sucessivos.

No período II A (i e ii) as estruturas são representativas, porém não operacionais ou reversíveis.

No período II B - as operações concretas são operações lógicas que obedecem todas às mesmas cinco leis de "agrupamentos" (que apresentarei mais adiante).

Finalmente, o pensamento hipotético e abstrato é sujeito às leis matemáticas dos grupos e rêdes.

À medida que as crianças se desenvolvem, a estrutura construida em idade anterior, evolui gradualmente para tornar-se parte integrante da estrutura do estágio seguinte.
Por exemplo, a idéia de ser um objeto algo permanente, que é aprendido gradualmente no primeiro período, é necessária para a noção de conservação de quantidade aprendida no período de operações concretas. Igualmente, as operações concretas constituem base para o sistema de operações formais que lhes sucede.

Para compreender proporcionalidade na adolescência, a criança precisa primeiro aprender a comparar duas quantidades quaisquer ou equipará-las, como faz no período de operações concretas.

A ordem dos períodos de desenvolvimento é constante. Todavia, a idade em que se atinge um estágio não pode ser absolutamente fixada, pois é sempre relativa ao ambiente que pode encorajar, atrapalhar ou mesmo impedir o seu aparecimento.
Além disso, um estágio pode aparecer bem cedo em uma espécie de situação ou material determinados, porém mais tarde em outra.

Temos pois, esquemàticamente:

I. - Período sensoro-motor

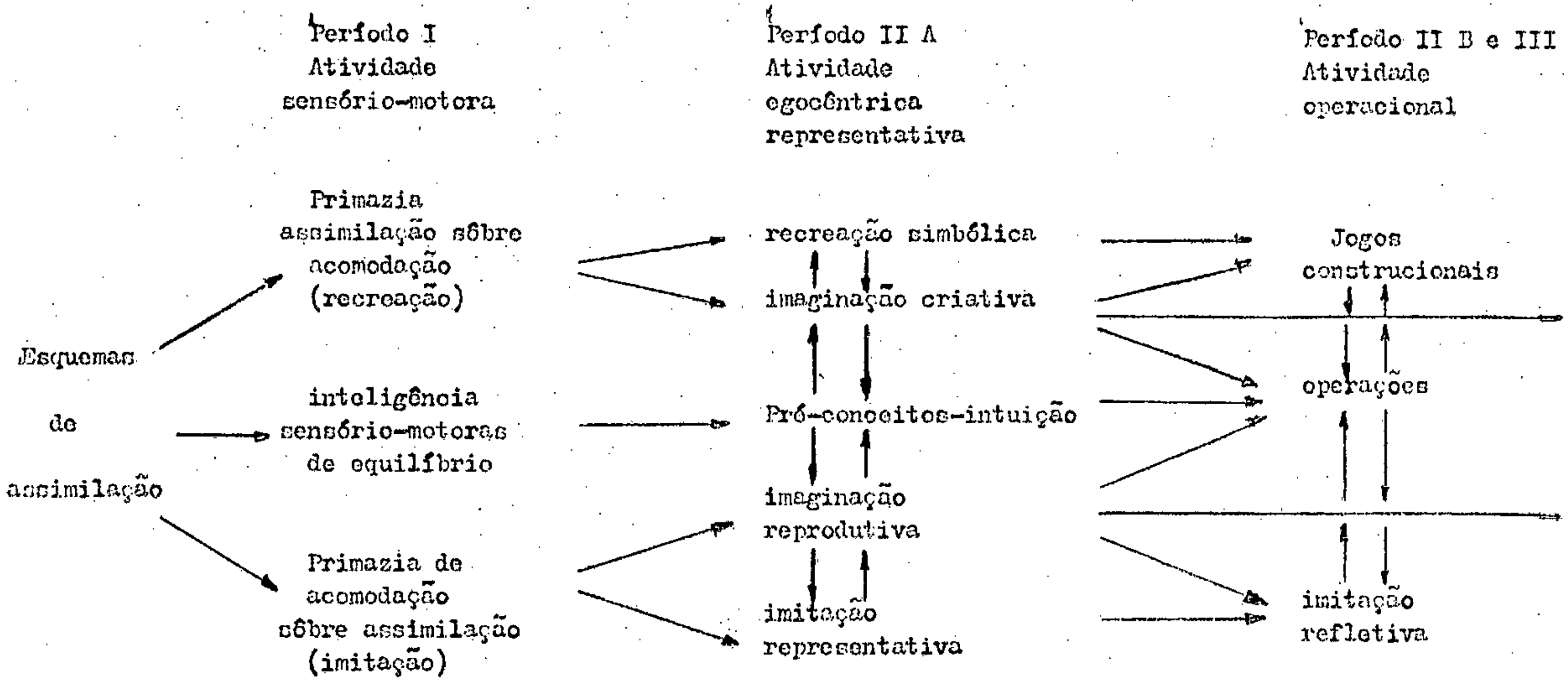
II :

A i - subestágio Pré-conceitual

ii - subestágio intuitivo

B - Operações concretas

III Período de operações formais.


Período I
Atividade
sensório-motora
Período II A
Atividade
egocêntrica
representativa
Período II B e III
Atividade
operacional
Esquemas
de
assimilação
Primazia
assimilação sôbre
acomodação
(recreação)
inteligência
sensório-motoras
de equilíbrio
Primazia de
acomodação
sôbre assimilação
(imitação)
recreação simbólica
imaginação criativa
Pré-conceitos-intuição
imaginação
reprodutiva
imitação
representativa
Jogos
construcionais
operações
imitação
refletiva

2.1 O Período sensório-motor (I)

É o período de desenvolvimento mental que começa com a capacidade para alguns reflexos e termina quando a linguagem e outros meios simbólicos de representar o mundo aparecem pela primeira vêz.

As realizações dêste período são de fundamental importância, pois formam a base de todos os progressos cognitivos.
Piaget compartimenta êste período em subestágios:

a) Exercícios, reflexos - tendências a repetir ações reflexas e assimilar nelas objetos novos.

b) Reações circulares primárias - ciclos de ações bem sucedidas-primeiras adaptações adquiridas - ações repetidas por causa delas próprias, sem tentativas de usá-las para um fim.

c) Reações circulares secundárias - são movimentos centralizados sôbre um resultado produzido no ambiente exterior, com o único propósito de mantê-lo.

d) Coordenação de esquemas secundários - a criança não tenta mais apenas repetir ou prolongar um efeito que descobriu ou observa por acaso, mas persegue um fim não imediatamente atingível e procura chegar a êle por meios intermediários diferentes. Deixa de considerar suas próprias ações como única fonte de causalidade e atribui ao corpo de alguma outra pessoa um conjunto de podêres particulares.

e) Reações circulares terciárias - procura ativa pela criança de resultados novos e tendo-os encontrado, sua acomodação a seu ambiente - "experimentando a fim de ver".

f) Invenção de novos meios através de combinações mentais - a criança começa a inventar, assim como a descobrir, começa a substituir ao agrupamento sensório-mentor, combinações mentais que lhe dão solução imediata para problemas, isto é, começa a ser capaz de representar o mundo exterior mentalmente em imagens, memórias e símbolos que é capaz de combinar sem fazer outras ações físicas.

Piaget acha que invenção não é mais do que a rápida organização de esquemas e que representação equivale ao poder de evocar mentalmente esquemas bem conhecidos.
O brinquedo também se torna simbólico, pois as crianças fingem

então executar ações ou fazem seus brinquedos executarem-nas.
Piaget sugere que a imagem mental (isto é, o símbolo quando é a cópia interior da reprodução do objeto) é meramente produto da interiorização da imitação ("Quando a acomodação de esquemas sensório-motores toma a forma de gastos visíveis, constitui imitação pròpriamente dita, mas quando, suficientemente desenvolvida para não precisar de experiência externa, se conserva virtual e interior, não levaria à imitação interiorizada que é a imagem?")

Bàsicamente, nestes subestágios, o que Piaget trouxe à nossa atenção foi a importância das atividades de cada criança e de sua capacidade de organizá-las em relação a oportunidades oferecidas dentro de seu ambiente. Assim leva a conduzir que um ambiente estimulante, resulta provàvelmente no maior desenvolvimento possível de capacidades na criança.

2.2.i O subestágio pré-conceitual (II A)

Período de preparação para operações concretas, abrange a transição de estruturas de inteligência sensório-motoras para pensamento operacional.

Este estágio estende-se dos dezoito meses ou dois anos até cêrca de quatro anos e meio.
No estágio pré-conceitual, a capacidade de representar uma coisa por outra aumenta a rapidez e o alcance do pensamento.
Embora essa capacidade de representar uma coisa por outra permita à criança usar a linguagem, interpretar e desenhar quadros, estender seu alcance na recreação a jogos simbólicos ou de construção e mais tarde ler e escrever, ela é ainda incapaz de formar verdadeiros conceitos. Quer isso dizer que não atribui uma palavra a uma classe de objetos,mas a numerosas ações ou experiências semelhantes e não o faz de maneira constante.
Desenvolve um esquema verbal que fica a meio caminho entre um esquema sensório-verbal e um esquema conceitual: são esquemas sensório-motores em processo de tornar-se conceitos.
Falta-lhes ainda a generalidade própria dos conceitos verdadeiros.

Enquanto o pensamento pré-conceitual resulta de um equilíbrio entre assimilação e acomodação, a recreação e a imitação apresentam predominância de uma e de outra.
Piaget encara o papel da recreação como muito mais do que uma preparação para atividades adultas. "Em uma palavra" diz êle, "Estes jogos formam uma vasta rêde de recursos que permitem ao ego assimilar o todo da realidade, isto é, intefrá-lo a fim de vivê-lo de novo, dominá-lo ou compensá-lo".

Tanto os esquemas simbólicos como os imitativos apresentam um desenvolvimento na espécie de assimilação que se verifica.

O raciocínio na criança pequena não vai do universal para o particular, por dedução, ou do particular para o universal por indução, mas do particular para o particular, sem generalização e sem rigor lógico. Piaget chama êsse raciocínio de transdução.
Menciona vários casos especiais de transdução em raciocínio: Justaposição, quando se dão julgamentos sucessivos e não relacionados; sincretismo, em contraste, consiste em ligar coisas que não são relacionadas. (tendência a ligar coisas por um ato amplo de percepção); realismo, ao estender inconscientemente seu próprio ponto de vista imediato a todos os pontos de vista possíveis.
Durante êste estágio as crianças acham difíceis todas as relações, mesmo as mais simples relações espaciais.
A importância da ação no desenvolvimento de conceitos espaciais é sugerida numa série de experiências nas quais se pediu às crianças que reconhecessem objetos e formas manuseando-os sem poder vê-los: a experiência mostrou que elas não sabiam o que tatear. Evidentemente, faltava-lhes uma representação mental dos objetos e das relações entre suas partes; não tiveram pois, noção de propriedades euclidianas, como número de lados, vértices ou paralelas.

2.2ii O subestágio intuitivo (II -A)

O subestágio intuitivo se estende de 4 anos e meio, mais ou menos, até cêrca de 7 anos.
Há nêle um desenvolvimento que permite às crianças começarem a apretar razões para suas crenças e ações, e a formarem alguns conceitos, mas seu pensamento não é, ainda, operacional.
Quer isso dizer que ainda não são capazes de fazer comparações mentalmente, mas precisam construí-las uma de cada vez na ação.
Na ausência de representação mental, seu pensamento é dominado por percepções imediatas e, consequêntemente seus julgamentos sofrem em vista da variabilidade típica da percepção.
Há incapacidade de ter em mente mais de uma relação de cada vez, o que resulta em numerosas limitações no pensamento. Há também falta de direção no pensamento da criança. E em terceiro lugar seu pensamento permanece egocêntrico. Não só argumentam de particular para o particular, por transdução, mas, atribuem vida e sentimentos a objetos e acreditam que os fenômenos naturais são feitos ou controlados por homens.
Em quarto lugar, a incapacidade de ver relações simples torna impossível compensar duas relações ou fazer mesmo as mais simples relações entre relações.

Número, tempo e quantidades: O aspecto do pensamento intuitivo mais em evidência nas soluções que as crianças dão a problemas com número e quantidades é sua incapacidade de conservar na mente mais de uma relação de cada vez. As dificuldades que surgem em resultado dessa estrutura mental incompleta, consistem na incapacidade de combinar com exatidão, na crença em que as quantidades não são conservadas quando a forma se altera, na impossibilidade de compreender relações entre um todo e suas partes ou entre uma classe e suas sub - classes e em muitas dificuldades consequêntes na medição ou na execução de operações com quantidades.

Fundamental à compreensão de número e à medição de quantidades é a idéia de correspondência de um para um, que uma vez feita, se considera mantida, apesar de novo arranjo de unidades.

Piaget mostrou que essa noção só se desenvolve gradualmente. Descobriu que crianças por êle submetidas a testes compreendiam a con - servação de número e substância mais ou menos aos seis anos; de pêso e área, meis ou menos aos oito anos; mas, de volume, não antes dos dez anos, mais ou menos.

Formar séries de todas as espécies apresenta dificuldades a crian - ças neste estágio, porque elas só são capazes de comparar dois elementos de cada vez. Não são capazes, por exemplo, de usar o princípio de medição, segundo o qual, s: A = B e B = C, C = A.

A relação de um todo com suas partes ou de uma classe com suas subclasses apresenta dificuldades comparáveis.

Conceitos espaciais : Durante o estágio intuitivo, a concepção que a criança tem de espaço está estreitamente prêsa às suas ações. Contudo, pode levar em conta, proximidade, separação, ordem e continuidade.

De suas observações, Piaget concluiu que a formação de imagens mentais ou outra representação de formas resulta da abstração de pro - priedades de formas durante o manuseio dos objetos pelas crianças. Precisam aprender a observar propriedades, como cantos ou lados paralelos procurando ativamente indícios da identidade de uma forma.

Em suma, criam apreciação de relações dentro de uma forma, como no espaço, através de memórias de sua exploração ativa da forma.

Assim, durante o estágio intuitivo, as propriedades topológicas de espaço (proximidades, separações, ordem e continuidade) começam a ser dominadas, mas as propriedades projetivas, como sombras e seções, ou as propriedades euclidianas de ângulos, paralelos, etc, raramente são compreendidas por crianças pequenas.

As crianças precisam agora de atividades estruturadas que levem à formação de conceitos simples e aquisição de algumas aptidões.
No passado era usado particularmente na matemática o exercício de somas em lugar de atividades que levassem à formação do conceito.

2.3 O subperíodo de operações concretas :

O "subperíodo de operações concretas" começa quando a formação de classes e séries ocorre mentalmente, isto é, quando ações físicas começam a ser "internalizadas" como ações mentais ou "operacionais".

O início do subperíodo coincide com a idade em que o egocentrismo diminui substancialmente e uma genuina cooperação com outras pessoas substitui o brinquedo isolado.

Durante o subperíodo vemos que as crianças dominam até mesmo relações complexas , classificam ou fazem séries de duas ou mais maneiras simultâneamente, imaginam vistas de outros pontos de observação além dos seus, medem com referência a dois eixos ao mesmo tempo, apreciam as interrelações de um todo com suas partes ou de uma classe com suas subclasses e assim por diante.

Piaget relaciona <u>oito agrupamentos</u> de relações com que as crianças aprendem a lidar durante êste subperíodo:

1) O mais simples agrupamento lógico de relaões ocòrre na formação de uma <u>hirarquia de classes</u>.- Por exemplo, a classe de animais pode ser dividida em subclasses : carnívoros e não carnívoros; ambas as subclasses podem ser novamente divididas em subclasses sucessivamente até chegarmos aos nomes de determinadas espécies de animais.

Contudo, até cêrca de nove anos, a maioria das crianças continua a encontrar algumas dificuldades para compreender relações entre classes.

2) Um segundo agrupamento de relações depende da capacidade de reunir relações que expressem diferenças, criando assim uma <u>ordem de sucessão</u>.- Por exemplo, em aritmética, comparam capacidades, distâncias e alturas, pesos, áreas e volumes, várias quantidades por meio de frações decimais e percentagens.

3) Uma terceira operação fundamental é a <u>substituição</u>. Por exemplo,as crianças usam constantemente relações como 8= 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3.... em aritmética, mostrando maneiras diferentes de chegar ao mesmo resultado final. O uso diário de diferentes combinações levam à apreciação da

relações dêsde que sejam substituições vistas na prática.

4) Em têrmos de relações, as operações precedentes dão origem à reciprocidade que é típica de relações simétricas. Começa a compreender relações como as de amigos, inimigos, parceiros em jogos, dois fatores de um número, simetrias de formas etc.

Quatro outros agrupamentos baseiam-se em operações multiplicativas, isto é, relações feitas de duas ou mais maneiras simultâneamente:

5) Multiplicação de classes: Quando uma criança arruma objetos em subclasses, considerando simultâneamente forma e côr, chega a quatro subclasses cuja descrição pode basear-se nos dois sistemas ao mesmo tempo. Por exemplo, quadrados vermelhos, quadrados azuis, quadrados amarelos, círculos vermelhos, círculos azuis, círculos amarelos. É provável que todas as crianças de nove anos sejam capazes de classificar objetos não só pela côr e forma mas também pela textura.

6) Multiplicação de séries: Associação de séries de valôres de duas variáveis. Por exemplo, é possivel identificar um quadrado, em um mapa, indicando os quadrados por ordem serial alfabèticamente, numa direção e numèricamente na outra. Este método já é conhecido de muitas crianças de 7 ou 8 anos no jôgo "batalha naval".

7) Correspondência de um para um: É um caso particular da multiplicação de séries: Se há apenas duas fileiras A1, A2, A3, A4, A5, e B1, B2, B3, B4, B5, de um para um, que é muito importante na formação de conceitos de tempo. A compreensão da correspondência de um para um precede o desenvolvimento de conceitos de conservação. Por exemplo, a conservação de número não é compreendida por crianças que não são capazes de copiar uma fileira de contas com precisão.

8) Árvore genealógica de classes: Finalmente tanto para classes como para séries, pòdemos estabelecer agrupamentos fazendo um têrmo corresponder a vários em lugar de um para um. Por exemplo, a classificação de formas em triângulos, seção cônica e quadriláteros, com suas subclasses.

Esses são os oito "agrupamentos de operações" lógicos que Piaget acha estarem à disposição das crianças durante o período de operações concretas. Como são lógicos, o pensamento que se contorna com êles obedece a certas leis. Piaget define cinco leis.

Leis de agrupamentos:

I - Lei de Fecho ou composição - Quando se combinam quaisquer ele -

mentos de um agrupamento, êles produzem um novo elemento da mesma espécie: duas classes distintas podem ser combinadas em uma classe ampla que abranja ambas.
Exemplo: $A + A_1 = B$, $B + B_1 = C$

II- Lei de inversão: Tôda mudança é reversível. Assim as duas classes anteriormente combinadas podem ser separadas de novo: $A + A_1 = B$ então $A = B - A_1$ ou $A_1 = B - A$.

III- Lei da associatividade : A combinação de operações é associativa, isto é, um resultado obtido de duas maneiras diferentes permanece o mesmo em ambos os casos. Por exemplo: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

IV - Lei de identidade: Uma operação combinada com seu inverso anula-se. Por exemplo: $A-A=0$.

V - Lei de tautologia: Uma classe adicionada a si própria permanece a mesma classe, por exemplo: homens + homens = homens. $A + A = A$. Esta é a lei para classes. - Para número a lei é de iteração: $A+A=2A$.

Piaget afirma que há nessa faixa um desenvolvimento de jogos nos quais se praticam pelo menos algumas das oito categorias de agrupamentos. Portanto, se as crianças nesses grupos de idade não gostam de matemática, certamente é porque seus professôres não lhes aproveitam os interêsses naturais.

Há ainda muito perigo de conduzir a aprendizagem verbalmente e assim deixar de ligá-la à atividade essencial para que tenha significação.

Piaget mostrou que, para a compreensão desenvolver-se, tôda a sequência de internalizações precisa ser completa, a começar pelas atividades de que depende tudo mais. Em uma de suas experiências constatou que uma criança que contava bem não demonstrou compreensão de qualquer dos conceitos de número, mas outra que não sabia contar até dez, apesar disso explicou correspondências de um para um, conservação de número, relação entre partes e um todo, e composição de número.

2.4 Período de operações formais.

Piaget acredita que as operações formais se iniciam pela cooperação com outras pessoas, na adolescência:

..."as coerções de outras pessoas não seriam suficientes para gerar uma lógica na mente da criança, mesmo que as verdades por elas impostas tivessem conteúdo racional; repetir idéias corretas, mesmo quando a pessoa acredita que elas se originam de si próprias, não é o mesmo que raciocinar corretamente. Pelo contrário, para ensinar outros a raciocinarem lògicamente, é indispensável que se estabeleçam entre êles e a própria pessoa aquelas relações simultâneas de diferenciação e recipꝛocidade que caracterizam a coordenação de pontos de vista..."

Piaget propôs outras "regras" para as operações formais assim como fêz para o pensamento operacional pois o pensamento lógico pode ser descrito em têrmos matemáticos empregados na lógica proposicional, mas isto não nos interessa no presente estudo.

Como uma observação final podemos afirmar que Piaget chamou atenção para quatro aspectos principais durante os anos escolares: a função diretiva da fala, a formação de conceitos, a transposição de experiências concretas para têrmos verbais e simbólicos, e a evolução do pensamento lógico. Mas, embora o trabalho de Piaget sugira muitas abordagens novas no ensino, essa não foi sua preocupação principal: seu objetivo foi descrever o pensamento infantil, não melhorá-lo.

3. Pequeno glossário auxiliar de têrmos específicos empregados no texto:

AÇÃO REVERSÍVEL - Ação que se pode inverter, por uma ação oposta restabelecendo-se a situação inicial.

ACOMODAÇÃO - Modificação de esquemas como resultado de novas experiências.

ADAPTAÇÃO - Equilíbrio entre acomodação e assimilação,resultando em ajustamento ao ambiente.

ASSIMILAÇÃO -Incorporação de novos objetos e experiências e esquemas existentes.

CLASSIFICAR-Situar mentalmente um objeto, com exatidão, no grupo correspondente.

CONCEITO-Idéia de uma classe de objetos ou numa relação, normalmente expressada por uma palavra.

EGOCENTRISMO-Interpretação distorsiva de expereências alheias, e ações,pessoas ou objetos, a partir dos esquemas do próprio indivíduo.

ESQUEMA -Sequência bem definida de ações físicas ou mentais.

ESQUEMA REPRESENTACIONAL-Esquema no qual se usa uma coisa para representar outra.

ESTÁGIO INTUITIVO-O estágio em que as crianças parecem fazer julgamentos imediatos sem passos mentais conscientes em sua formulação.

GEOMETRIA EUCLIDIANA-Ramo quantitativo da geometria, relacionado com medição de linhas, ângulos, superfícies e volumes.

GEOMETRIA PROJETIVA- A geometria de transformação de uma linha ou superfície em outra, como na confecção de mapas planos da terra.

INTERNALIZAÇÃO-Representação do mundo exterior por memórias, imagens, linguagem e símbolos.

JUSTAPOSIÇÃO-Ligação de julgamentos,opiniões ou explicações sucessivps e não relacionados.

OPERAÇÃO - Ação que ocorre na imaginação.

PROCESSOS COGNITIVOS - Processos mentais relativos ao conhecimento, como percepção, memória, imagens, raciocínio, etc.

REAÇÃO CIRCULAR - Reprodução ativa de resultado obtido inicialmente por acaso, com variações e experimentação.

REALISMO INTELECTUAL - Representação inexata de um objeto em consequência de a criança ler na situação o que conhece, em lugar de limitá-lo ao que pode perceber.

SENSÓRIO-MOTOR - Simultâneamente perceptual e motor.

SÍMBOLO - Imagem evocada mentalmente, ou objeto material escolhido para representar uma classe de ações ou objetos.

SINCRETISMO - Ligação de coisas ou idéias não relacionadas .

TRANSDUÇÃO - "Raciocínio" por analogia direta, do particular para o particular, sem generalização ou rigor lógico.

2ª Parte:

A formação dos conceitos matemáticos baseados na teoria psicológica de Piaget.

0. Introdução- O aprendizado de matemática.

Como diz o Dr. Dienes, o simples fato psicológico de que a construção deve preceder o julgamento ou a análise, tem sido, por muito tempo esquecido com efeitos desastrosos sôbre os métodos de ensino de matemática.
As falhas podem estar na fonte de informação, no processo de transmissão, ou na extremidade receptora. Ou, pode ser, que todo o sistema de lição seja um veículo inadequado para a transmissão da informação matemática.
Podemos também dizer que a ênfase na utilidade excluiu o estudo da "teoria" e, assim torna difícil as aplicações e pràticamente impossível a fertilização de idéias.
Aquêles que estão engajados em solucionar o problema, compreenderam que a percepção matemática raramente nasce dos quadro-negros, especialmente tratando-se de crianças menores, e começaram a sentir a necessidade de um material matemático mais especialmente concebido para êste fim.
Deve haver uma rica variedade de experiências matemáticas, a partir das quais os conceitos matemáticos possam ser construidos pelas próprias crianças.
Muitas experiências são necessárias para cada conceito; de outro modo, só ocorrerá associação e não generalização.

A matemática não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, embora tais técnicas sejam claramente essenciais para sua utilização efetiva.
Ela deve ser vista a tes como uma estrutura de relações. O simbolismo formal é sòmente um meio de comunicar partes da estrutura de uma pessoa para outra.
Uma proposição matemática é uma proposição relativa a alguma conexão dentro da estrutura; para exprimir tal conexão temos de usar um simbolismo, que é em suma, uma espécie de linguagem especialmente inventada para êsse fim.
Por exemplo a proposição simbólica: $2(A+B)=2A+2B$ estabelece uma conexão entre duas partes da estrutura, a que trata da adição e a da multiplicação.

O conhecimento de que podemos passar dos símbolos 2(A+B) para os símbolos 2a+2b, e vice-versa, é conhecimento técnico que pode não incluir qualquer conhecimento do elo efetivo simbolizado pela fórmula. Outro exemplo: para tornar claro o que significa adição, é necessário o conceito de "é o mesmo que". Essa espécie de "estruturação" é a própria essência do pensamento matemático.

Piaget foi o primeiro a perceber que o processo de formação de um conceito toma muito mais tempo do que se supunha anteriormente e que muito trabalho, aparentemente sem relação com o conceito, deve ser realizado antes que haja qualquer indício na direção que está tomando o pensamento: Não poderíamos formar os conceitos sem ter prèviamente jogado longamente com seus elementos.

Na teoria de Piaget, ficou bem claro que as crianças desenvolvem o pensamento construtivo muito antes do analítico. Para tornar o aprendizado tão construtivo quanto possível, será necessária uma quantidade considerável de material concreto.

1. A formação do conceito.

1.1 O conceito:

Não se pode afirmar nada com certeza, pois ainda sabemos pouco acêrca do modo pelo qual as crianças conceituam.

Do ponto de vista tradicional, sôbre a formação dos conceitos, a ordem de sucessão é: percepção - abstração - generalização.

A criança começa com percepção. Desde a infância começa a discriminar, abstrair-se e generalizar a partir dos dados da realidade circundante:

Um conceito pode então ser definido como uma generalização a partir de uma série de dados relacionados que possibilita responder a, ou pensar em, estímulos específicos ou percepções, de uma maneira determinada.

Os conceitos parecem proceder das percepções, do contato com objetos e situações vitais, de experiências sofridas e de ações realizadas.

A linguagem, os números e outros símbolos matemáticos, desempenham um importante papel na formação dos conceitos: possibilitam o pensar. Contudo, as crianças podem usar a palavra adequada e não terem o conceito correspondente.

Mais profundamente podemos dizer que um conceito é o mais alto grau de generalização que pode chegar-se acêrca de relações ou qualidades afins.

Piaget sustenta que todo o pensamento se apoia em uma ação e os conceitos matemáticos têm sua origem nas ações que as crianças praticam com os objetos e naõ nos objetos mesmos.

A faculdade fundamental em que se baseia todo conhecimento lógico e matemafico é a reversibilidade , isto é, a possibilidade de voltar com o pensamento ao ponto de partida.
Piaget julga que a reversibilidade tem origem nas primeiras semanas de vida quando a criança afasta de si um objeto e depois o volta a aproximar.

Por meio da repetição dessas ações desenvolve a capacidade de coordenar operações de caráter retroativo e processos de antecipação.

1.2 A formação de conceitos e a matemafica:

Os conceitos matemáticos correspondem a um tipo especial de conceitos : são generalizações sôbre relações entre certas séries de dados.

Quando se trata, por exemplo, de números naturais (1,2,3,4...etc) a criança passa da percepção (procedente do meio ambiente que a rodeia) e das ações, ao conceito.

Em qualquer hipótese se a criança não chega a alcançar plenamente o conceito dos números naturais, se não chega a existir em sua mente, independentemente das coisas, aparatos, ações ou circunstâncias, seriam muito limitados os cálculos e operações que poderiam realizar.Pois antes de tudo, a matemática é uma atividade mental e o fato de se escrever cifras num papel é uma mera ajuda: "A matemática estuda a ordem em forma generalizada, fazendo abstração dos objetos particulares e fenômenos em que se apresenta " (Newson,c.v.).

Sem dúvida a compreensão dos conceitos matemáticos não é tudo para a formação da capacidade matemática. Esta exige, além da compreensão dos conceitos o conhecimento da linguagem e dos símbolos, dos métodos e demonstrações.

Acredita-se que o conceito é, no entanto, a sua base mais sólida e mais ampla.

2. O Problema das bases lógicas, dos números naturais e da matemática em geral.

Os números 1, 2, 3, etc., que usamos tão frequêntemente em nossa vida diária, recebem o nome de números naturais, porque se admite, geralmente, que tenham um sentido "filosófico", uma existência natural, inteiramente independente do homem.

Formam juntamente com os números inteiros negativos, os fracionários e outras séries numéricas mais amplas, o sistema numérico complexo.

Os números naturais são conceitos abstratos. A inteligência humana,depois de examinar os fenômenos e suas circunstâncias, elaborou a partir dêles, o conceito de número natural.E, mesmo que seja certo que o conceito de número natural seja mais exequível que o de outros números , não deixa de ser um conceito abstrato.
Disto se conclui, que os números naturais são inteiramente independentes dos têrmos e símbolos que usamos para sua representação.

Ainda que todo o edidício da matemática moderna esteja baseado no conceito de número natural, êste conceito segue encerrando um certo mistério.
Existem várias hipóteses sôre o caminho que o homem primitivo seguiu para chegar ao conhecimento dos números naturais: É possivel que o homem primitivo tenha tido necessidade de usar têrmos mais ou menos equivalentes aos nossos "muitos" e "poucos". Um grupo muito numeroso, por exemplo, seria descrito como "muitos".

A partir desta e outras experiências se suscitaria a necessidade de quantificar com exatidão.

Outro exemplo: se um grupo de homens tivesse que usar machados de pedra, logo se veria se tinham suficientes, demasiados ou insuficientes. Esta "correspondência de um a um" teve sem dúvida uma grande importância para uma elaboração posterior do conceito de número e conduziria também, sem dúvida, a têrmos como "mais", "menos","tanto como".
Numa outra situação, um pastor poderia confrontar o número de suas ovelhas com um número igual de pedras. As pedras e as ovelhas são totalmente diferentes, mas cada ovelha e cada pedra representam uma unidade e existe uma correspondência biunívoca (um a um) entre elas.
O uso de grupos modêlo tinha muitas limitações. O homem primitivo obteria o seu primeiro conceito de cinco "como o número de dedos de uma mão, não o "cinco" em abstrato. Um grande avanço de ordem intelectual foi o passo de transição das palavras que representa-

vam os grupos modêlos dos números abstratos. Não sabemos exatamente como ocorreu isto.

Devia produzir-se no homem primitivo, como agora se produz na criança , um salto intelectual em direção à idéia de "dois" ou de "três" em abstrato.

Como chegam a alcançar a idéia de número natural a criança e o homem primitivo quando comparam entre si grupos de objetos? Alguns como o filósofo e matemático francês H. Poincaré, crêem que o conceito dos números naturais é resultado de uma intuição primária.

Piaget (e outros como Bertrand Russel, A.N.Whitehead etc.,) discorda diametralmente dessa resposta. Para êle o conhecimento dos números está baseado inteiramente na lógica.

Isto exigiria que a criança adquirisse certos conceitos lógicos antes de ser capaz de compreender os números.

A criança, partindo de seus jogos com bolas, dados, etc., vai construindo por si só o conceito de "conjunto" e obtem, por abstração, a partir dos conjuntos coordenáveis (os que têm o mesmo número de elementos) o conceito de número cardinal.

Quer dizer que os conceitos lógicos precedem os conceitos numéricos e métricos.

De certo modo podemos considerar a matemática como um "jogo" em que nós mesmos estabelecemos as regras e que o jogamos de acôrdo com elas.

A opinião de Piaget é que a criança não chega a realizar abstrações pelo mero fato de manejar os materiais, mas que a abstração se produziria a partir do momento em que a criança chega a apreciar o significado das transformações que têm lugar quando classifica objetos e os coloca por ordem de tamanho, ou quando os agrupo de uma forma determinada e depois os reagrupa formando outra estrutura distinta.

Piaget acha que as noções matemáticas não se derivam dos materiais mesmos, mas da captação do significado das operações realizadas com êstes materiais. Considera que as noções e a capacidade para manejá-las mentalmente se obtem usando um material concreto, mas são independentes do material emprégado.

Quando a criança chega a apreciar o significado de seus atos é capaz provàvelmente de representar-se mentalmente certas operações relacionadas com estas atividades.

O pensamento da criança, na opinião de Piaget, está demasiadamente influenciada por suas percepções, que podem ser equivocadas.

Por exemplo, a começo, suas percepções lhe conduzem a confundir a extensão e o conteúdo (entendido êste último como a conexão entre a parte e o todo) de tal maneira que não pode diferenciar aquela dêste e não compreende a idéia de totalidade.

Para Piaget nem as percepções nem a associação de imagens proporcionam a noção de conjunto porque são rígidas, irreversíveis e não podem ser reordenadas de diferentes maneiras.

Segundo Piaget para que a criança seja capaz de estabelecer uma correspondência absoluta, ainda quando variem as situações, é preciso que tenha capacidade suficiente para alcançar a noção de categoria(em seu sentido lógico), donde se conclui que esta é a base para se chegar ao conceito de número.

Para Piaget o conceito de número não se baseia em imagens ou na mera capacidade para usar símbolos verbais, e sim na formação e sistematização na mente infantil de duas operações: classificação e seriação.

Estas duas operações se combinam para formar o conceito. Para êste fim, ambas operações são ao mesmo tempo equivalentes e distintas: as qualidades específicas de cada membro do conjunto podem ser eliminadas de modo que se possa formar a unidade homogênea - por exemplo, as características que distinguem as cadeiras, mesas, etc., são eliminadas e se considera cada um dêsses objetos como uma "coisa".

O conceito de "classe" ou a operação mental de classificar é uma versão interiorizada do agrupamento de objetos similares.

Dêste tipo de atividade a criança vai obtendo o conceito de relação. O sistema de numeração é uma fusão de classificação e ordenação.

Para ter a idéia do número 8, por exemplo, a criança necessita agrupar em sua mente, oito objetos para formar uma classe e colocar 8, entre 7 e 9, isto é, em relação de ordem.

Segundo Piaget, os conceitos lógicos precedem os numéricos e êstes não se produzem utilizando símbolos matemáticos, verbalizações ou processos mecânicos.

De acôrdo com êste ponto de vista, seria necessário facilitar-lhe materiais didáticos: as crianças teriam que coordenar séries de objetos, ordenar, incluir uma "classe" em outro mais geral, etc.

3. Conclusões:

Através do estudo realizado pode-se ver que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos básicos é um processo lento e complexo que todavia não nos é bem conhecido.

Parece certo que os conceitos não se desenvolvem de forma súbita, mas ao contrário, aparecem a princípio como umas noções vagas e obscuras que vão ganhando em claridade, amplitude e profundidade com a maduração e a experiência.

Antes que os sistemas de ações elaborados na mente (sistemas operativos) adquiram firmeza devem reunir, segundo Piaget, certas condições sem as quais os conceitos se mostrariam inconsistentes.

As propriedades são as seguintes (comparadas com as propriedades do grupo matemático):

1. Uniformidade - Duas operações quaisquer podem combinar-se para dar lugar a uma terceira operação -
Exemplo: $3 + 4 = 7$ -

2. Reversibilidade - Para cada operação existe certa operação oposta que a anula -
Exemplo: $3 + 4 = 7$ e $7 - 4 = 3$ -

3. Associatividade - O mesmo objetivo pode ser alcançado por caminhos diferentes ou seja, três operações podem combinar-se, não importa que duas delas se combinem previamente . -
Exemplo: $(1 + 4) + 2 = 1 + (4 + 2)$ -

4. Identidade - Existe uma "operação nula" que resulta quando uma operação se combina com sua oposta -
Exemplo: $5 - 5 = 0$ -

Podemos também afirmar que a memorização de regras não é garantia alguma de que a criança possa manejá-las operativamente, usanto o têrmo com a significação dada por Piaget, de manipulação ou elaboração mental.

O grande trabalho de Piaget evidenciou que o pensamento lógico (quer dizer, os sistemas de idéias que dão ao pensamento sua consistência interna) alcança seu desenvolvimento pela interação entre o organismo e o sistema matéria-energia(universo físico), favorecida pela posse de determinadas estruturas linguísticas e pela ação do meio ambiente cultural.

A atividade motora conduz a operações mentais e ao agrupamento e coordenação de descobertas a que chamamos inteligência.

O pensamento lógico é, portanto, o utensílio mais poderoso de que o homem dispõe para compreender ou enfrentar o sistema matéria - energia (mundo físico).

3ª Parte:

1. Objetos auxiliares:

Os objetos feitos são exemplos de um trabalho apoiado em uma filosofia psicológica ou seja de uma filosofia do desenvolvimento da inteligência.
Não são um ponto final , mas, ao contrário uma proposta de um método de trabalho.
Este método pode ser empregado dentro de toda a extensão do aprendizado da matemática na infância.
Foram escolhidos como ilustração, apenas alguns conceitos básicos em fases separadas, porém êste tipo de abordagem deve ser feito a cada novo passo, constituindo assim, um sistema pedagógico, até a criança alcançar o tipo de raciocínio formal-abstrato, quando não mais precisará dêstes artifícios, pois estará capaz de pensar abstratamente.
Deve-se notar que não há necessariamente nêstes objetos apresentados um encadeamento, isto é, um elemento não leva obrigatoriamente a outro elemento. São apenas exemplos isolados, tomados em diferentes níveis para demonstrar a viabilidade do método durante um longo período.(por exemplo, corresponderia cada objeto a dada ano do curso primário, exemplificando dêste modo apenas uma das dificuldades que a criança deveria atravessar naquele período.)

1.1 Aplicação do material:

A aplicação de todos os objetos será estruturada em três fases. A cada uma delas corresponde um aprendizado diferente, de acôrdo com as três fases descritas por Piaget, para a formação de um conceito:

1) Fase preliminar
2) Fase estruturada
3) Fase prática.

A fase preliminar, a do jôgo, corresponde a uma atividade bastante indireta, aparentemente sem finalidade - a espécie de atividade que é realizada e apreciada para o próprio bem. É essa espécie de comportamento que é normalmente chamada de jôgo.
Essa fase deve portanto, ser tão livre quanto possível, com os ingredientes do conceito disponíveis como material de brinquedo.

É o primeiro contato da criança com o material.

A segunda fase, é mais direta e com um fim em vista, mas é caracterizada pela falta de qualquer compreensão nítida do que se está buscando . Já há um certo grau de atividade estruturada.

A terceira fase deve oferecer uma prática adequada para a fixação e aplicação dos conceitos que foram formados.
A maior parte do aprendizado deve ser realizada individualmente, ou em pequenos grupos de dois ou três.

2.1 Descrição do material:

Material - execução - medidas-

O material foi bàsicamente executado em madeira, o que o tornou muito mais barato.
Algumas peças são de fàcil execução, podendo serem feitas mesmo em uma pequena oficina, digamos, da própria escola onde serão utilizadas (caso a tenha).
Uma pequena parte do material foi feita em acrílico, porque era necessário a transparência.

As medidas foram baseadas nas tabelas antropométricas de Henry Drayfuss ou então tiveram razões matemáticas (unidade).

A côr só foi utilizada quando exercia uma função e algumas vêzes (no caso da prancha 2) a variação da percepção táctil á visual na faixa de idade visada.

A madeira utilizada foi a "Gonçalo Alves".

2.2 Especificação do material:

a) Prancha 1:

Caracterização da forma plana:

O mundo dos objetos é rico em formas. Na geometria, algumas formas típicas desempenham um papel especial.

O ensino moderno da matemática elementar é caracterizada pela representação material de qualquer fato.
Ao manusear as formas, a criança poderá sentir suas características.
Todos êstes objetos têm características: o que não é "redondo" é "plano" tem "cantos" ou "pontas". O bloco triangular é "pontudo" o quadrado tem "quatro pontas", etc.
Na prancha só vêm representadas, a título de exemplo, quatro formas, mas o mesmo tratamento deve ser dado às outras figuras.
Os encaixes permitem à criança, a exploração da forma interna exteriormente e ainda o desenvolvimento motor.

b) Prancha 2:

Exploração da forma

Caracterização do tamanho

Classificação

Séries

Classes-subclasses

Conjunto

Correspondência (um para um, um para muitos)

As peças maiores não foram feitas em madeira maciça, apresentando, portanto, frisos criados pelo corte da madeira em algumas faces.
Esses fato não foi considerado como problema, pois que na faixa de idade em que será aplicado o material, êstes frisos não são sequer notados pelas crianças, afirmação esta baseada no pressuposto levantado de que a atividade inteligente da criança é primeiramente muito mais táctil e "construtiva" que visual ou verbal e constatado na prática durante a experimentação realizada.
A diferenciação das séries foi feita através de variações de texturas(pelo mesmo motivo)
A primeira série é lisa, na segunda, a textura foi dada por ranhuras.
Estes sulcos foram mais profundos para facilitar a percepção das crianças que em caso contrário tenderiam a considerá-los apenas como um risco.
É um material bastante rico e flexivel.
A princípio, a percepção da forma pelo manuseio, o aprender a examinar as propriedades ativamente.
A ordem do tamanho: maior-menor. O jôgo com objetos reais traz experiencias que serão base intelectual para conceitos posteriores.
A criança deve ser convidada a construir outras formas com o material.

As formas serão consideradas estéticas se a disposição dos objetos for caracterizada pela harmonia e contraste.
Pensar acêrca das disposições escolhidas intuitivamente, pode levar à descobertas de estruturas formais, e com isto estamos praticando matemática, pois, entende-se por matemática moderna o estudo das estruturas formais.
As peças foram dimensionadas de modo a serem, maior que a mão da criança, do mesmo tamanho da mão da criança, pouco menor, e bem menor,(em média) para que a noção de tamanho tenha a princípio ela mesma como referencial.

A menor peça é a unidade para o sistema.
Deverá ser introduzida também esta noção à criança, colocando uma peça ao lado da outra, ao formar por acréscimo, uma nova peça similar à seguinte.

A criança fará coordenação de duas séries por proximidade, separação, ordem, continuidade , além do reconhecimento de formas através de suas propriedades euclidianas (número de lados, vértices, etc).
As séries poderão ser separadas, selecionadas, contadas, poderá ser apreciada a relatividade do têrmo maior-menor, alguns, poucos , todos -
As classificações podem ser feitas por relações simultâneas, por exemplo: textura e formato, etc.
Nêste trabalho só estão sendo apresentados cubos, mas, o mesmo tratamento deve ser feito com várias formas como cilindros, esferas, cones pirâmides, etc.
Portanto, cada série deve distinguir-se da outra por textura e/ou forma.
A mesma série deverá repetir-se em texturas diferentes para que a criança possa fazer maior número de classificações e correspondências.

Com o mesmo material poderá ser simultâneamente introduzido o conceito de conjunto e subconjunto: Por exemplo, conjunto dos cubos, (A) subconjunto dos cubos lisos (B) B A etc.

c) Prancha 3:

Desenvolve o conceito de correspondência de um para um, introduzindo o princípio das coordenadas cartesianas.
Admite, dificuldades progressivas, Por exemplo: forma mais côr , forma mais côr mais textura, forma mais côr mais textura mais pêso.
O grau de dificuldade pode ainda ser variado de diversas maneiras , conforme o momento da aplicação.
Há sempre de duas a quatro possibilidades. O material pode ser trabalhado também pela teoria dos conjuntos.

d) Prancha 4:

Tem duas finalidades básicas: a de introduzir o conceito de volume e da unidade cm^3 e a noção de bases diferentes e de valor de posição.
O primeiro objetivo se fará enchendo as caixas transparentes com os cubinhos unitários. Daí, a criança poderá deduzir concretamente as fórmulas de volume. (o mesmo processo poderá ser usado em relação à áreas).
O segundo objetivo será descrito mais detalhadamente:
Para uma criança pequena, 17 é apenas associado à palavra-número dezessete, e não é, certamente, decomposto em dez e um sete.
O mesmo se aplica aos conceitos de ordem mais elevada da adição e das outras operações.
Uma criança poderá ter aprendido o conceito de que, para somar dois números, temos de contar seguidamente do primeiro número, com tantos números intermediários quanto indicado no segundo . Contudo ela poderá fi

car muito longe de conceber a estrutura da tarefa de 27 + 35 em que se deve realizar o grupamento e reagrupamento de dez em dez para executar econômicamente a tarefa.

Em outras palavras, os conceitos e processos matemáticos têm de ser aprendidos, primeiro, em forma pura, seguida dos mesmos conceitos e processos em forma notacional, isto é, com a estrutura do sistema notacional superimposta a êles.

Por exemplo, quando escrevemos um grande número como 24579, o que realmente queríamos significar é:

$$2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Se olharmos êste desenvolvimento à luz do princípio da variabilidade matemática, vemos que três variáveis entram nesse arranjo numerico : os algarismos, as potências e a base.

Poderíamos variar qualquer ou todos êstes sem destruir o aspecto essencial do valor de posição.

O conceito do valor de posição é independente dos valôres dos algarismos, exceto que o número dêstes é restringido em função da base. É independente do número de potências usadas, que é o que dá ao conceito sua natureza matemática caracterìsticamente aberta - é aberta em direção ao infinito. Além disso é independente da base.

Por exemplo:

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

Também pode ser escrito assim:

$$1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^0$$

Em outras palavras, 126, no sistema ternário, seria escrito como 11.200.

O que é comum a todos êsses modos possíveis de expressar némeros é o conceito de valor de posição. Quando tivermos variado os algarismos, as potências e a base, que restará ? Qual é a abstração matemática do valor de posição ?

Em cada caso, arranjamos de acôrdo com as potências descendentes da base, e o valor de cada algarismo deve ser sempre menor que o valor da base; ir para a direita significa atingir a potência inferior, ir para a esquerda é encontrar a potência superior seguinte.

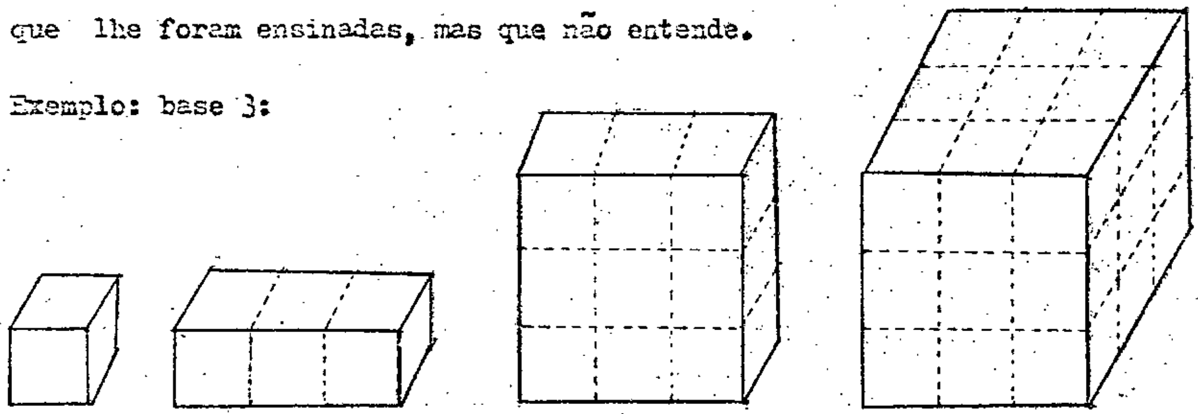
Se um algarismo atingir ou ultrapassar a base, significa que já temos no mínimo, mais um na potência superior seguinte.

Êsse é o "esqueleto" do conceito do valor de posição e é com êsse grau de generalização que devemos raciocinar à luz do princípio da variabilidade matemática.

Usando o material a criança pode ver concretamente os números em outras bases(em função do lado do cubo) e se acostumará a perceber a semelhança essencial da estrutura, semelhança essa que é a estrutura matemática.

Quando a criança representa essa estrutura com o simbolismo matemático , estará, então, utilizando êsse simbolismo para comunicar informação sôbre a estrutura que descobriu e não apenas usando um conjunto de regras que lhe foram ensinadas, mas que não entende.

Exemplo: base 3:



3^0 3^1 3^2 3^3

Cada conjunto de caixas representa um diferente valor da base.
Os volumes das figuras sucessivas estão em progressão geométricas no exemplo acima na razão comum 3.
Na caixa para base 4, essa razão será 4, etc.
Depois de exercitada a noção de base e dominada completamente a estrutura do material, pode se conduzir às quatro operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.
Por exemplo:
Uma soma em base 4 :

$$\begin{array}{r} 1232 \\ +223 \\ \hline 2121 \end{array}$$

A base 10 também deverá ser usada.
Outro exemplo:

Armar 157 unidades em diferentes bases:

base 3 :	12211
base 4 :	2131
base 5 :	1112
base 6 :	321
base 10:	157

Uma subtração em base 4:

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 1232 \\ (111) \\ \hline 1102 \end{array}$$

Estes exercícios poderão ser realizados com as caixas de bases diferentes.

e) Prancha 5:

Introdução aos conceitos algébricos elementares:

Levará tempo para que uma letra possa simbolizar uma classe de números, para a criança, tão claramente quanto o número, uma classe de coleções.
É preciso então, fazer equações simples, representadas concretamente.
Por exemplo:

$x + y = 3 \qquad \square\ \square + y = \square\ \square\ \square$

$x = 2 \qquad y = \square$

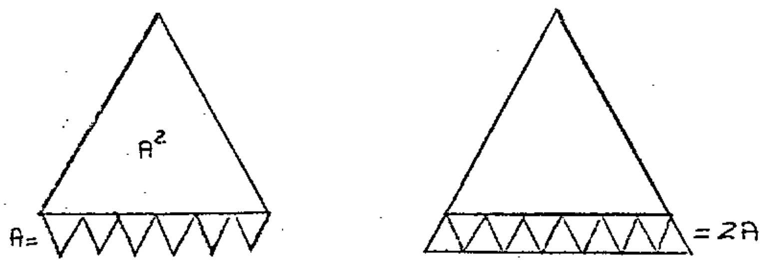
(quantos quadrados valem y?)

Dêsse modo as crianças podem ser levadas a compreender o que realmente uma equação simboliza, tirando de sua experiência qual é a essência comum da "situação de equação".
Foi escolhido como outro exemplo de emprêgo do método dentro da álgebra o conceito matemático de quadrado:
Certo abandono da forma geométrica de um quadrado é necessário, agora, para tornar o conceito de quadrado mais abstrato.
Por isso foi usado também o triângulo como forma básica.
A princípio a criança deve ser conduzida a fazer formas semelhantes, mas, maiores a partir de outras formas idênticas. Isto é, formar quadrados maiores por meio de outros pequenos, ou triângulos maiores por meio de outros pequenos, etc., o que serve como exercício preliminar para o teorema das áreas das figuras semelhantes e também generaliza o conceito de quadrado, tornando-o menos prêso à forma do quadrado real. Isso deve ser seguido por uma gradual apreciação da relação:

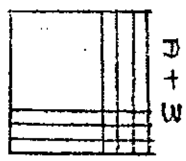
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Por exemplo:
Tomemos um grande triângulo que pode ser cheio por A x A ou seja A^2 pequenos triângulos.
Quando estiver cheio, haverá, ao longo de cada lado exatamente A pequenos triângulos.
Se acrescentarmos uma linha de A triângulos obteremos a figura à esquerda e se somarmos outra linha A, a figura à direita. (segue)

Temos, portanto, $A^2 + 2A$ e se acrescentarmos mais um triângulo teremos $A^2 + 2A + 1$ e teremos completado outro triângulo grande cujas linhas tem 1 mais que A, e, portanto, deve haver ~~nãe~~ $(A + 1)^2$ pequenos triângulos.
Assim, construimos $(A + 1)^2$ por meio de A^2, 2A e 1, e assim por diante, $(A + 2)^2$ por meio de A^2, 4A e 4 etc., até obtermos a fórmula $(A + B)^2$ onde A é o número de pequenos triângulos em uma linha do primeiro grande triângulo e B é o dos triângulos extra que entram na linha à proporção que construimos triângulos cada vez maiores.



Outro exemplo:
Digamos que o quadrado seja A por A: isso significa que há A linhas até a parte inferior do quadrado, depois ainda há mais 3, o que perfaz A + 3 linhas ao todo.
Em cada linha há claramente, A + 3 pequenos quadrados, então construimos $(A + 3)^2$ de $A^2 + 6A + 9$



Dentro desta linha ainda poderá se dar maior variedade de aplicação ao material.

Prancha 6:

Visão espacial do ângulo, das relações doa ângulos dentro de uma figura geométrica.
Por exemplo: a criança será convidada a distribuir os pinos segundo a organização de um cubo - Terá oportunidade de observar os oito vértices e a relação espacial das arestas que formam os ângulos.
Isto deverá ser repetido com diversas formas para que além da criança observar os ângulos dentro dessas formas, maneje também a rotação de um ângulo em relação a um ponto.
Aqui foi utilizada a côr para fazer contraste e ficar mais claro a visão espacial do ângulo.

, Bibliografia:

BEARD, R .M. "Educational research and learning of Mathematics" em Aspects of Education: A New Lock in Mathematics teaching, coordenado por Land. F. (Journal of the Institute of Education, Universidade de Hull) 1965

BEARD, R .M. "An investigation into Mathematical concepts among Ghanaian Children I" teacher Education, maio de 1968.

BEARD,R .M. - Como a criança pensa (A Psicologia de Piaget e suas Aplicações Educacionais) IBRASA, 1973 título original. An Outline of Piaget 's Developmental Psychology for students and teachers- 1969.

CASTRUCCI, Benedito - Elementos de Teoria dos Conjuntos - C.E.E.M. - São Paulo, 1971

DIENES, Z.P. - Aprendizado Moderno da Matemática, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1970.
Título original: Building on Mathematics, Londres, 1967.

DREYFUSS, H . - Antropometric data.

INHELDER,B e PIAGET, J. - The Growth of Logical thinking,Londres: Routtedge and Kegan Paul, 1957.

KOTHE,S. - Pensar é divertido. EPU, São Paulo, 1973.
Título original: Denken Macht Spass, 1968.

LOVELL,K. - Didacta de las Matematicas (Sus bases psicologicas) Ediciones Morata, Madrid, 1962.
Título original: The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, University of London Press, 1961.

PIAGET, J. - Seis estudos de psicologia, Forense, Rio de Janeiro,1964.

PIAGET, J. - The Psychology of Intelligence, Londres: Routtdge and Kegan Paul, 1950.

PIAGET, J. - L'enseignements mathematiques, Neuchâtel,Paris,1955.

PIAGET, J. -e SZEMINSKA,A. - The child's conception of number, Londres, 1952.

PIAGET, J. - The child's conception of Geometry, Londres, 1960.

PIAGET, J. e INHELDER, B.- Devoloppement des Quantités chez L'Enfant, Paris, 1941.

PIAGET, J. e INHELDER, B. - La Genèse des Structuras Logiques Elementaires, Paris, 1959.

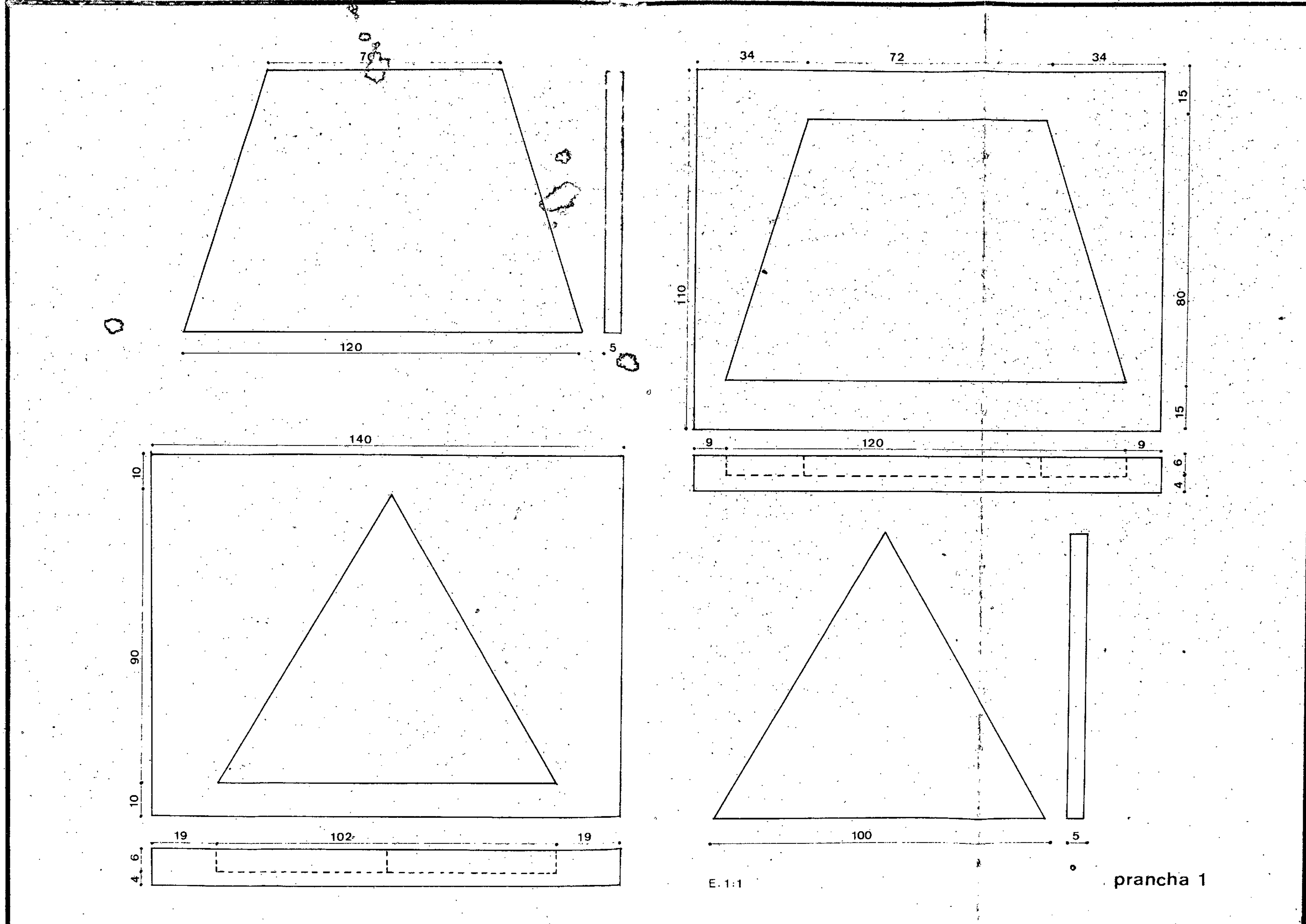
PIAGET, J. e INHELDER, B.- The child's conception of space, Londres, 1956.

VERNON, P.E.- The Psychology of Perception, Londres, Penguin Books, 1962.

WAISMANN, F. - Introduction to mathematical thinking: The formation of concepts in modern mathematics, Londres, 1951.

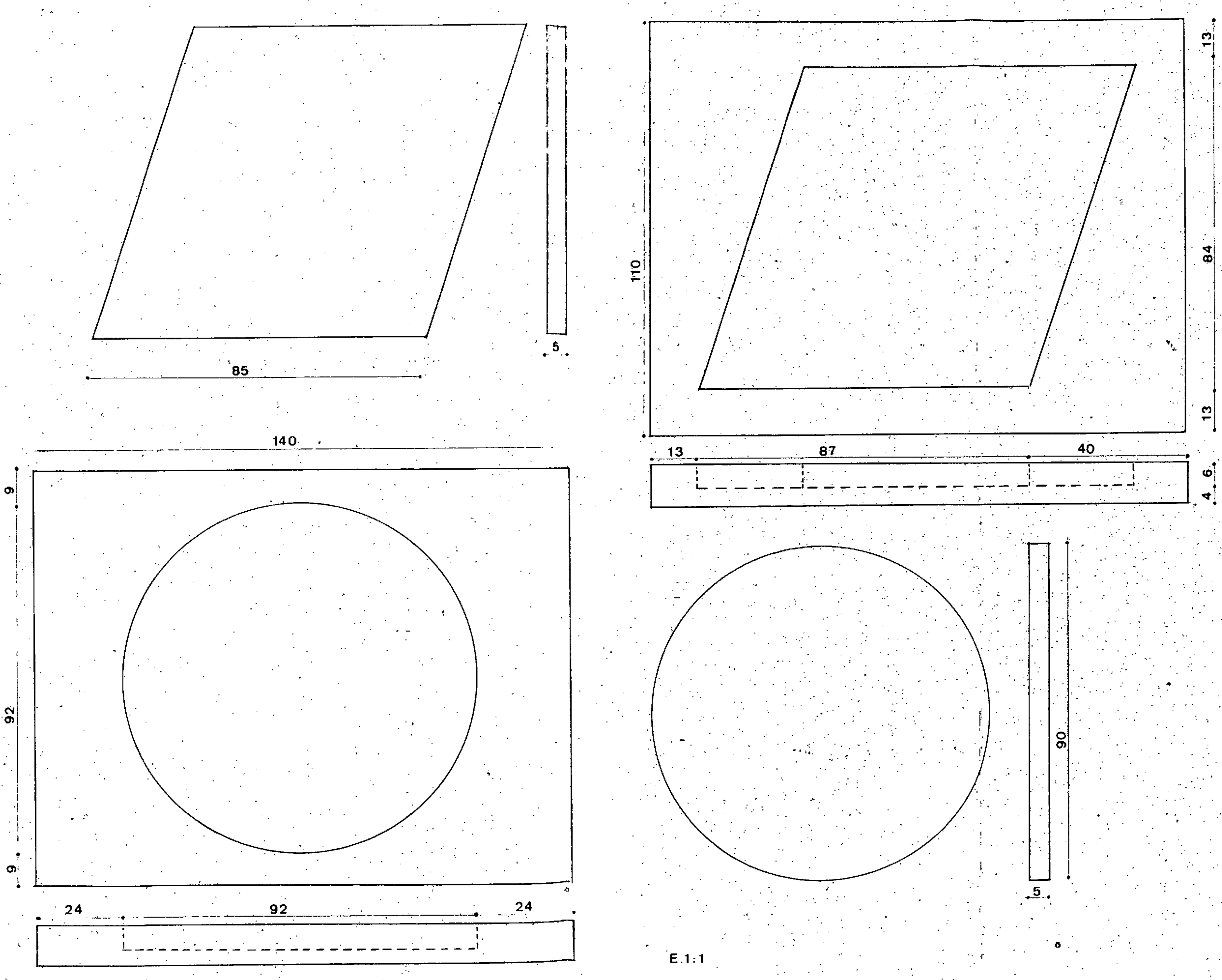
Desenhos

Obs. - Todas as cotas estão em mm.

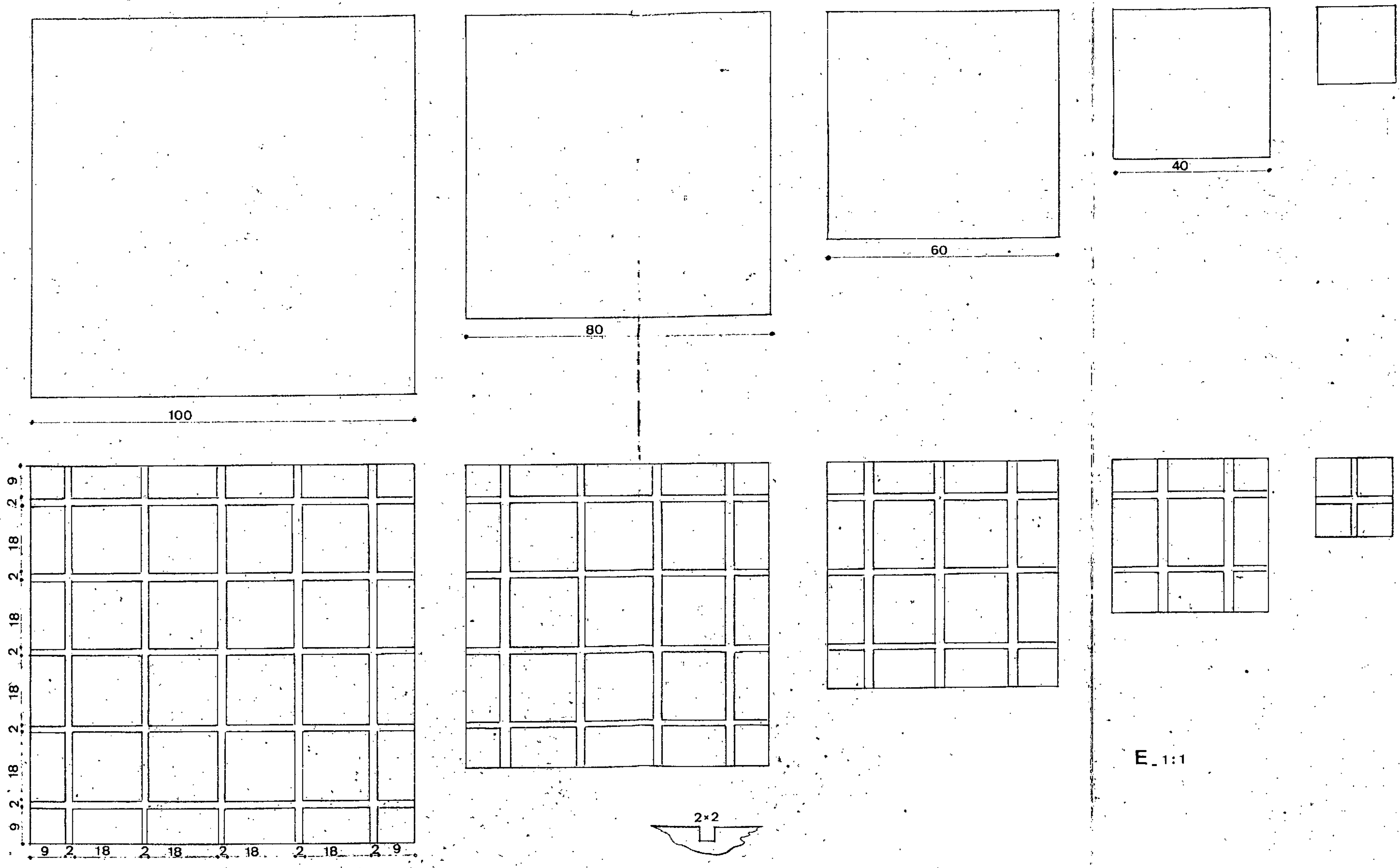


E. 1:1

prancha 1

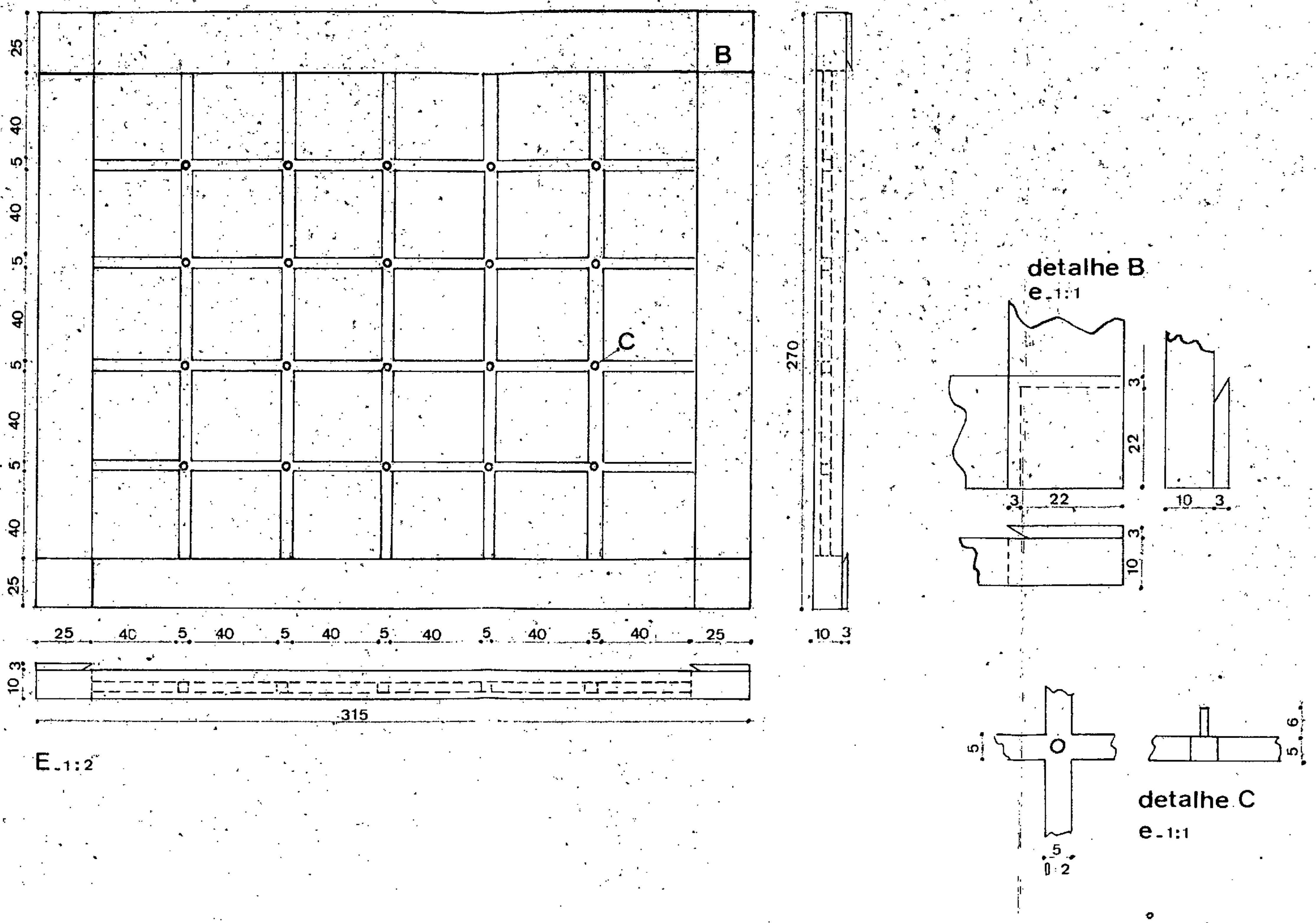


1

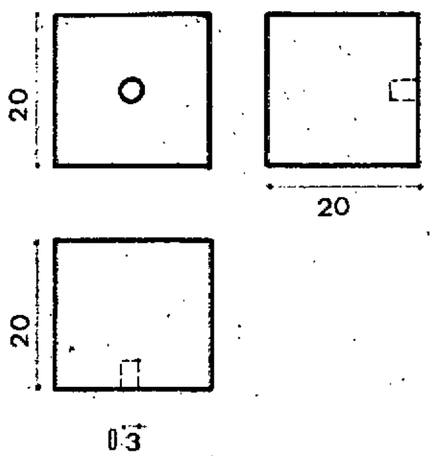


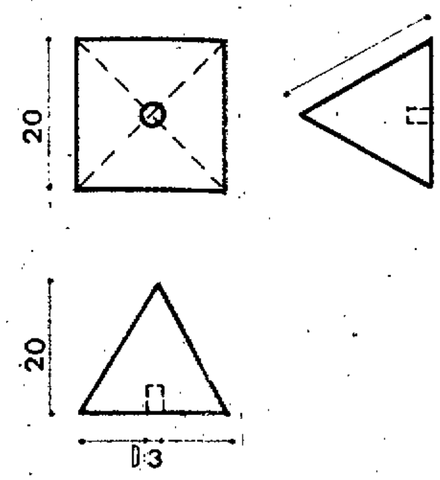
E_1:1

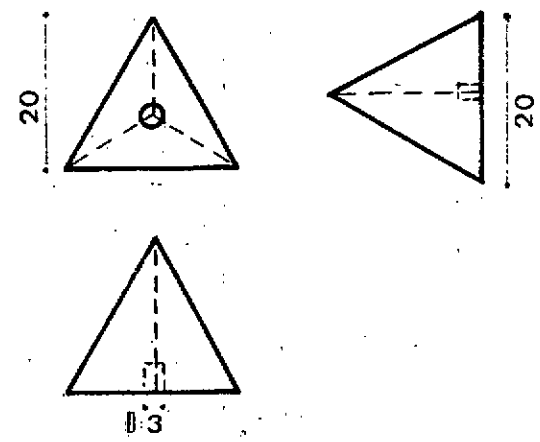
cubos. prancha 2

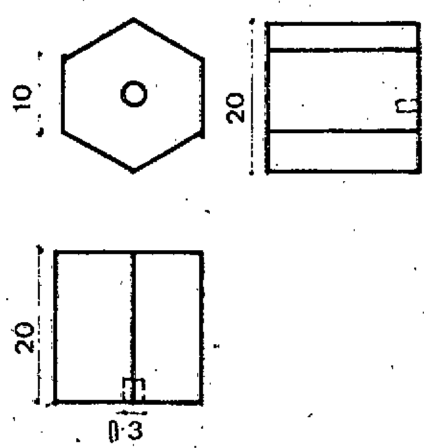


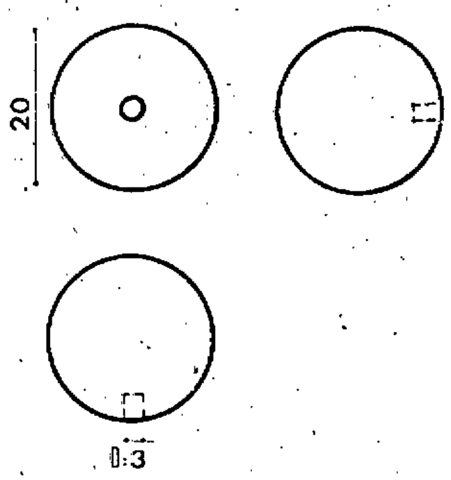
prancha 3



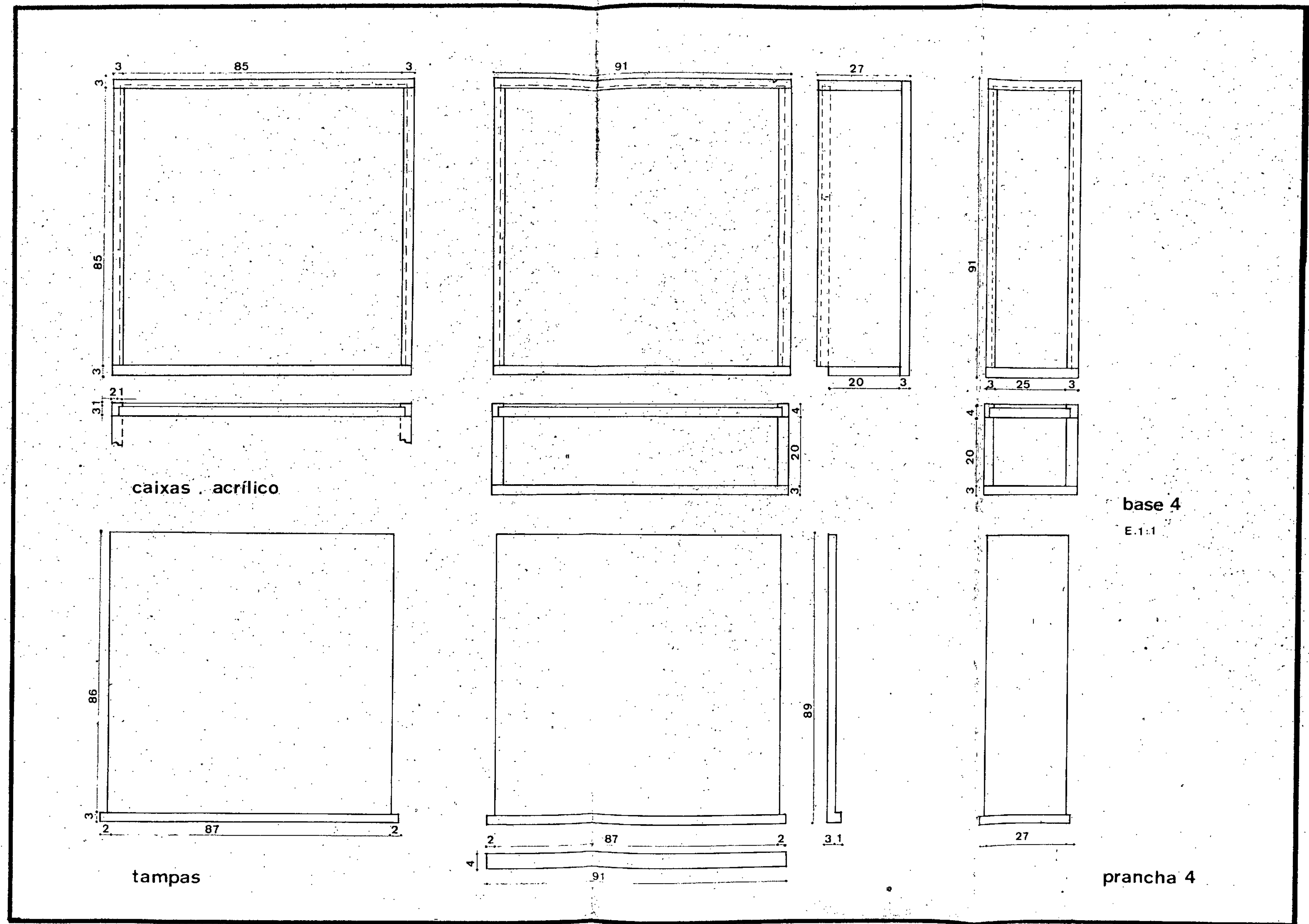


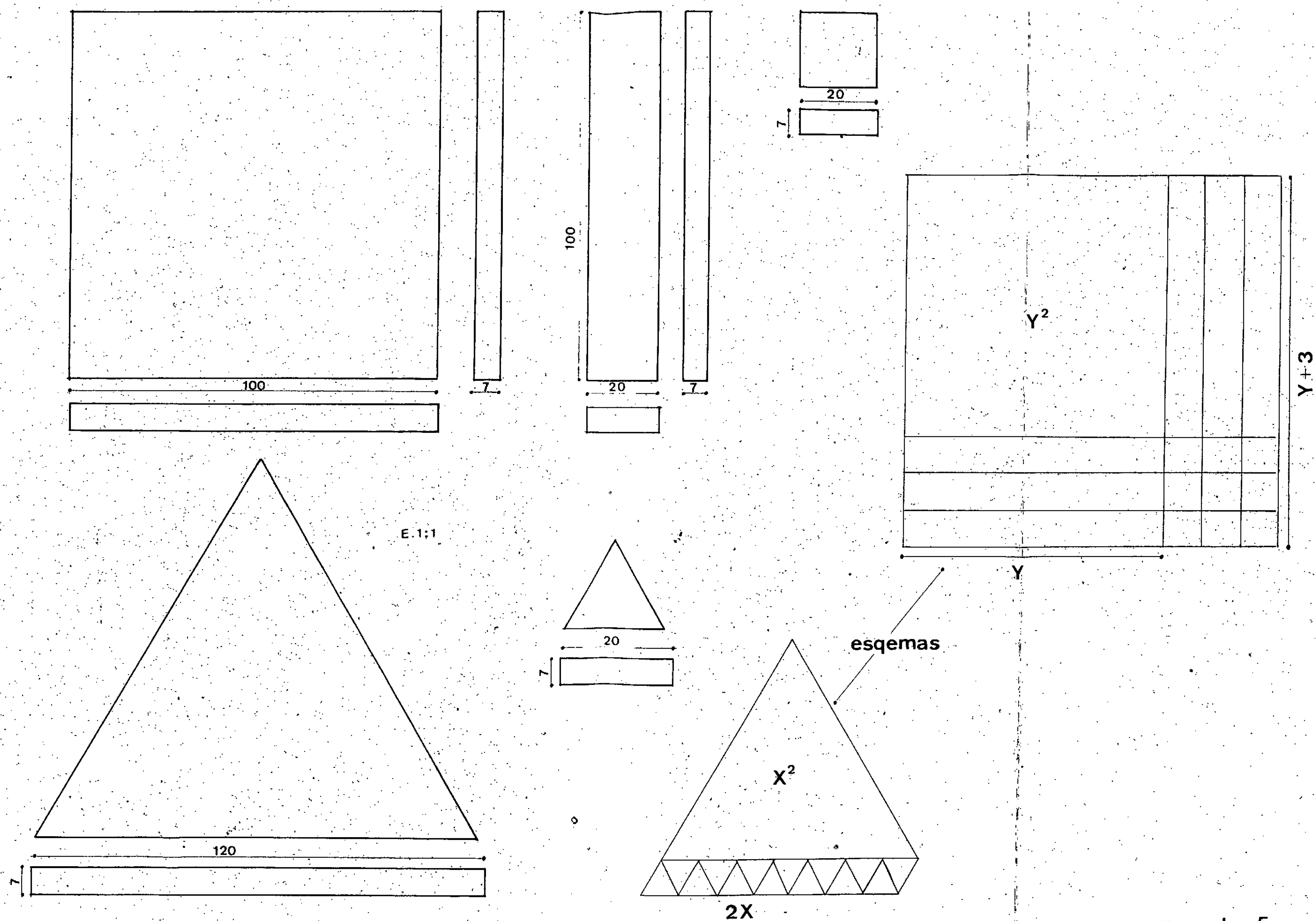




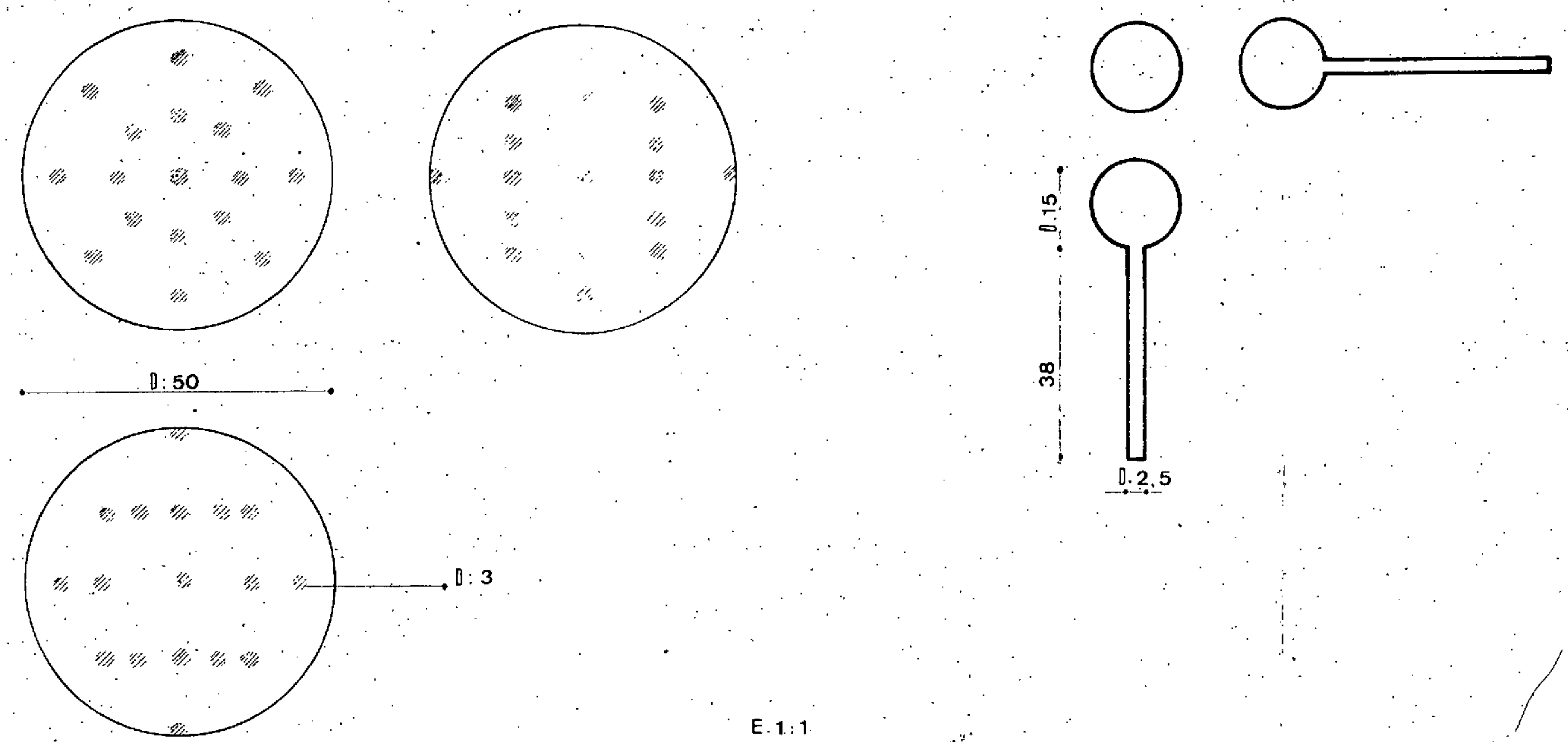


E 1:1


caixas . acrílico
3
85
3
85
3
3
91
27
91
20
3
3
25
3
21
31
4
20
3
4
20
3
base 4
E.1:1
86
3
2
87
2
89
2
87
2
3 1
27
4
91
tampas
prancha 4



prancha 5



prancha 6